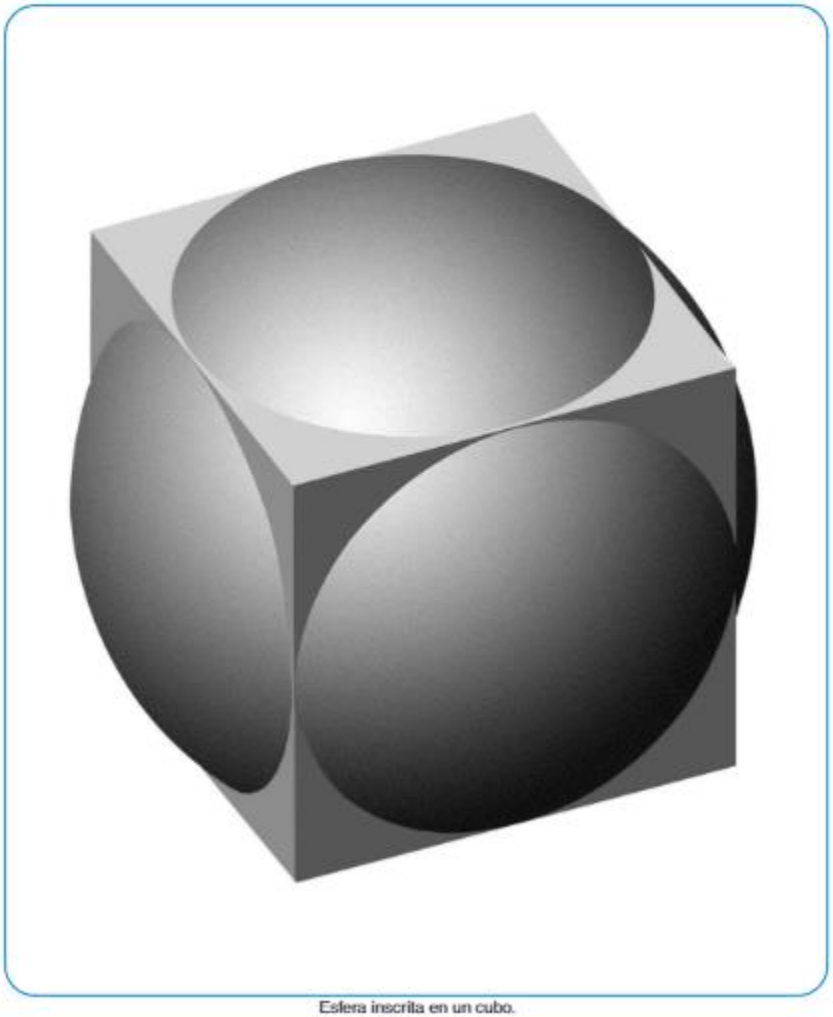
Solucionario Dibujo Técnico 2 Bachillerato Editex

1 Trazados fundamentales

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Lugares geométricos en el plano.
2. Construcción del arco capaz de un segmento $\overline{AB}$ bajo un ángulo dado α.
3. Lugar geométrico de los puntos del plano desde los que se ve una circunferencia dada bajo un ángulo α.
4. Lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas que parten de un punto *P* de una circunferencia dada.
5. Lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas que pasan por un punto *P* interior a una circunferencia dada.
6. Lugar geométrico de los puntos medios de un segmento dado, de longitud *d*, al deslizar sus extremos sobre dos rectas perpendiculares.
7. Lugar geométrico de los puntos medios del segmento $\overline{PA}$, siendo *A* un punto cualquiera de una recta *r* y *P* un punto fijo exterior a *r*.
8. Lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de igual longitud de una circunferencia dada.
9. Lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de distancias a dos puntos dados *A* y *B* sea constante e igual a *p*/*q*.
10. Lugares geométricos en el espacio.
11. Cuadrilátero inscriptible.
12. Rectas antiparalelas.
13. Circunferencias que pasan por los extremos $\overline{AB}$ y cortan a los lados *a* y *b* del triángulo *AVB* según cuerdas paralelas.
14. Cuadrilátero circunscriptible.
15. Ángulo de dos circunferencias.

Los puntos medios de las aristas de un cubo se encuentran en la superficie de una esfera cuyo centro es el mismo que el del cubo y con diámetro igual a su diagonal de cara. El cubo secciona a la esfera en seis circunferencias inscritas a sus caras y tangentes entre sí.



Esfera inscrita en un cubo.

1 LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL PLANO

Lugar geométrico es el conjunto de puntos del plano que cumplen una determinada propiedad.

En el libro de 1º de Bachillerato se trataron una serie de lugares geométricos básicos que conviene recordar:

1.1. Lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia *d* de otro dado *A*

Los puntos que cumplen esta propiedad se encuentran en la circunferencia de centro el punto dado *A* y radio la distancia indicada *d*. Estos puntos son centro de las circunferencias de radio *d* que pasan por el punto dado *A*.

1.2. Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otros dos dados *A* y *B*

Los puntos que cumplen esta propiedad se encuentran en la mediatriz del segmento definido por los puntos *A* y *B*. Estos puntos son centro de las circunferencias que pasan por los puntos dados *A* y *B*.

1.3. Lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a una distancia dada *d* de una recta dada *r*

Los puntos que cumplen esta propiedad se encuentran en las paralelas a la recta dada *r* a la distancia indicada *d*.

Estos puntos son centro de las circunferencias tangentes a la recta *r*, de radio la distancia *d*.

1.4. Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas dadas

Los puntos que cumplen esta propiedad se encuentran en las bisectrices de los ángulos formados por ambas rectas. Si las rectas dadas son paralelas, la bisectriz es la paralela media (mediatriz del segmento de perpendicular comprendido entre ambas rectas).

Estos puntos son centro de las circunferencias tangentes a ambas rectas.

1.5. Lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a una distancia dada *d* de una circunferencia

Los puntos que cumplen esta propiedad se encuentran en la circunferencia concéntrica con la dada y de radio *R+d*; y si *d* es menor que *R*, también en la circunferencia de radio *R-d*. Si *d=R*, entonces *R-d=0* y esta segunda circunferencia se reduce a un punto, el centro de la circunferencia dada.

Estos puntos son centro de las circunferencias de radio d tangentes exteriores o interiores a la dada.

1.6. Lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una recta *r*, en un punto *T*

Los puntos que cumplen esta propiedad se encuentran en una perpendicular a la recta por el punto *T* de tangencia.

1.7. Lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a otra dada, en un punto *T*

Los puntos que cumplen esta propiedad se encuentran en la recta definida por el centro de la circunferencia y el punto *T* de tangencia.

1.8. Lugar geométrico de los puntos del plano desde los que se ve un segmento $\overline{AB}$ bajo un ángulo dado α

Se dice que desde un punto *P* se ve un segmento $\overline{AB}$, bajo un ángulo α, cuando al trazar desde *P* las visuales que pasan por los extremos *A* y *B* del segmento forman en *P* el ángulo α. Los puntos del plano que cumplen esta propiedad se encuentran en el arco capaz del segmento $\overline{AB}$ bajo el ángulo α y en su simétrico respecto al segmento.

2 CONSTRUCCIÓN DEL ARCO CAPAZ DE UN SEGMENTO $\overline{AB}$ BAJO UN ÁNGULO DADO α

Su centro se encuentra en el corte de la mediatriz del segmento con la semirrecta, que pasando por uno de los extremos del segmento, forma con éste un ángulo igual a $90°-\alpha$. De los dos arcos posibles, en el caso de que $90-\alpha$ sea positivo, el que se encuentra en el mismo lado que el centro (respecto al segmento) es el correspondiente al ángulo α (arco $\widehat{APB}$), y el del lado contrario (arco $\widehat{AQB}$) el correspondiente a su suplementario (**Fig. 1**). Si $90°-\alpha$ es negativo, el arco correspondiente al ángulo α es el que se encuentra en el lado contrario al centro, respecto del segmento.

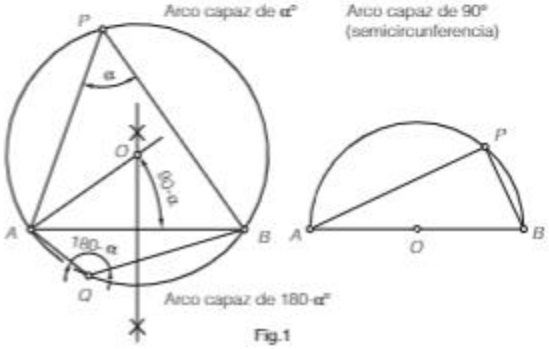


Fig.1

El arco capaz y su simétrico respecto al segmento forman el lugar geométrico **completo** de los puntos del plano desde los que se ve $\overline{AB}$ bajo el ángulo α (Fig. 2).

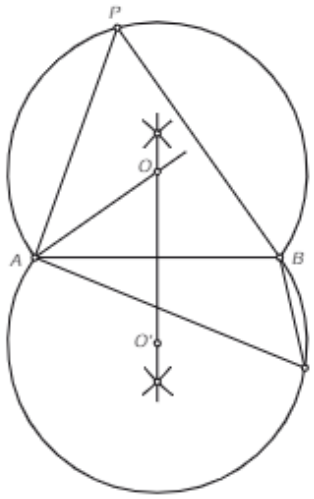


Fig. 2

Aplicaciones del arco capaz

El arco capaz se aplica en la construcción de triángulos en los que se conoce un lado y el ángulo opuesto, y en base a esto situar puntos en el plano, dibujar cuadriláteros partiendo de triángulos en los que se descomponen, etc.

Ejemplos:

1º. Dibujar un triángulo del que se conoce el lado a= 35 mm, ángulo $\hat{B}$= 50º y ángulo $\hat{A}$= 35º (Fig. 3).

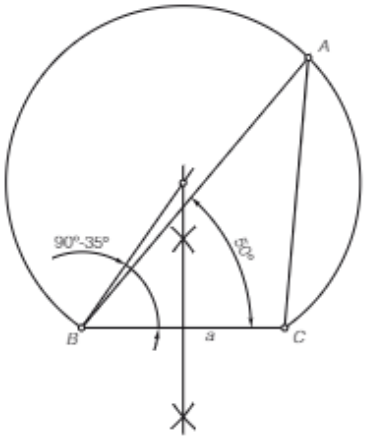
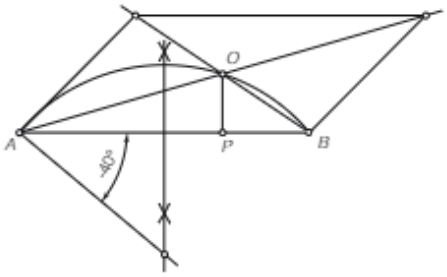


Fig. 3

2º. Dibujar un paralelogramo del que se conoce el lado $\overline{AB}$=50 mm, el ángulo de las diagonales, correspondiente a ese lado, de 130º, y el punto P, proyección del centro O sobre $\overline{AB}$, siendo $\overline{AP}$=35 mm (Fig. 4).



Se dibuja, mediante el arco capaz, el triángulo AOB.

Fig. 4

3 LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS PUNTOS DEL PLANO DESDE LOS QUE SE VE UNA CIRCUNFERENCIA DADA BAJO UN ÁNGULO α

El ángulo en un punto P del lugar geométrico buscado, según se aprecia en la figura de análisis, es circunscrito a la circunferencia y mide αº. El lugar geométrico buscado es la circunferencia concéntrica con la dada que pasa por P.

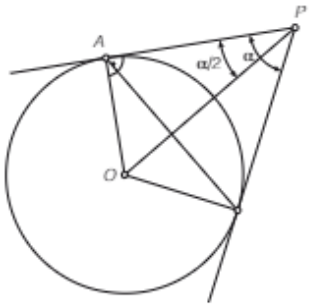


Figura de análisis

Pasos:

1º Por un punto arbitrario *A* (de la circunferencia) se traza una recta tangente **(Fig. 5)**.

2º Con vértice un punto arbitrario de la tangente, se dibuja el ángulo α y su bisectriz.

3º Por *O* se dibuja una paralela a la bisectriz determinando sobre la tangente el punto *P* por el que pasa la circunferencia pedida.

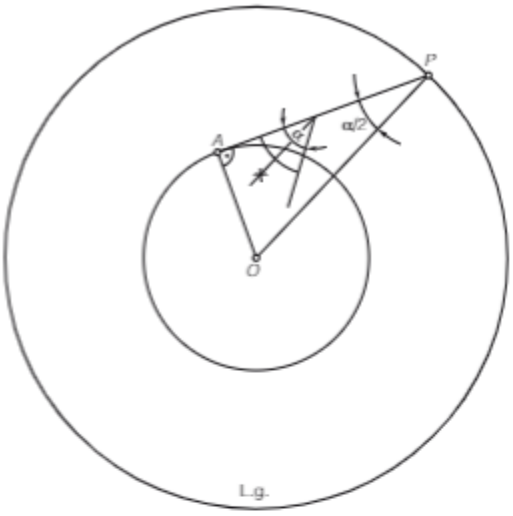


Fig. 5

4 LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS PUNTOS MEDIOS DE LAS CUERDAS QUE PARTEN DE UN PUNTO *P* DE UNA CIRCUNFERENCIA DADA

Teniendo en cuenta que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia, las cuerdas y las perpendiculares a ellas por *O* forman triángulos rectángulos de hipotenusa $\overline{OP}$ y ángulo recto en M_1, M_2, M_3, etc., por lo que el lugar geométrico pedido es la circunferencia de diámetro $\overline{OP}$, arco capaz del segmento $\overline{OP}$ bajo ángulo de 90º, **(Fig. 6)**.

Por otra parte, se observa que las dos circunferencias se relacionan mediante una homotecia de centro *P* y razón 1/2. Si realizamos una homotecia de la circunferencia dada, de centro *P* y razón 1/3, se obtendría la circunferencia lugar geométrico de los puntos de las cuerdas que distan 1/3 de su longitud del punto *P*.

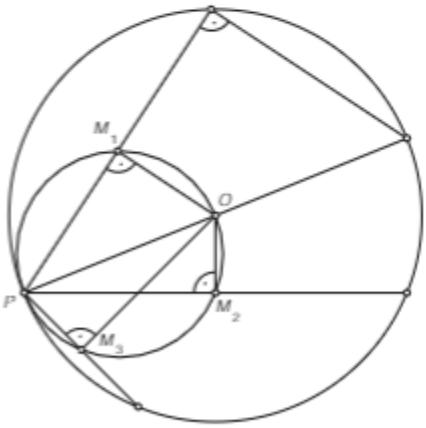


Fig. 6

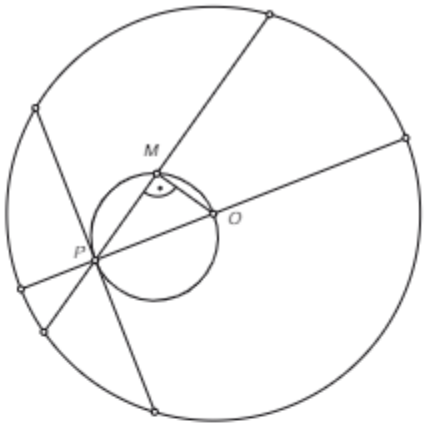


Fig. 7

5 LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS PUNTOS MEDIOS DE LAS CUERDAS QUE PASAN POR UN PUNTO *P* INTERIOR A UNA CIRCUNFERENCIA DADA

Igual que en el epígrafe anterior, el lugar geométrico pedido es la circunferencia de diámetro $\overline{OP}$, arco capaz del segmento $\overline{OP}$ bajo ángulo de 90º (Fig. 7).

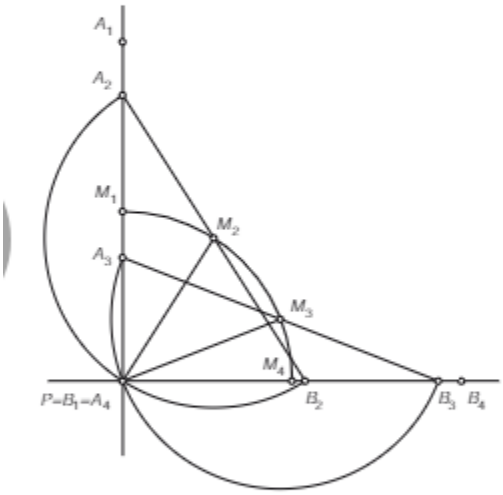


Fig. 8

6 LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS PUNTOS MEDIOS DE UN SEGMENTO DADO, DE LONGITUD *d*, AL DESLIZAR SUS EXTREMOS SOBRE DOS RECTAS PERPENDICULARES

El triángulo formado por las dos rectas y el segmento $\overline{AB}$ (Fig. 8) siempre es rectángulo en *P*, lo que implica que $PM_1=PM_2=PM_3=...=d/2$. Es decir, la distancia del punto medio *M*, del segmento $\overline{AB}$, al punto *P* de corte de las rectas es constante e igual a *d*/2, por lo que el lugar geométrico pedido es la circunferencia de centro *P* y radio *d*/2.

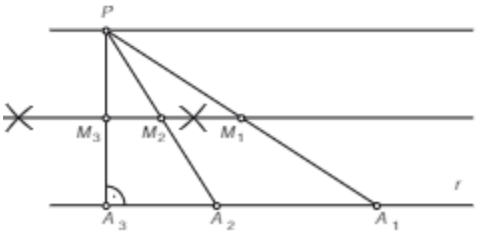


Fig. 9

7 LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS PUNTOS MEDIOS DEL SEGMENTO $\overline{PA}$, SIENDO *A* UN PUNTO CUALQUIERA DE UNA RECTA *r* y *P* UN PUNTO FIJO EXTERIOR A *r*

Por el teorema de Tales, los segmentos determinados por un haz de rectas paralelas equidistantes sobre rectas oblicuas son iguales. Es decir, el lugar geométrico pedido es una recta paralela a *r* y equidistante de *P* y *r* (Fig. 9).

Por otra parte, se observa que las puntos medios *M* y extremos *A* se relacionan mediante una homotecia de centro *P* y razón 1/2.
Modificando la razón de la homotecia se obtendrán puntos con otras relaciones de distancias a los extremos de los segmentos $\overline{PA}$.

8 LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS PUNTOS MEDIOS DE LAS CUERDAS DE IGUAL LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA DADA

Se ha de tener en cuenta que la distancia de O, centro de la circunferencia dada, a las infinitas cuerdas de igual longitud es siempre la misma, distancia $\overline{OM}$ (M es el punto medio de la cuerda), luego el lugar geométrico pedido es otra circunferencia concéntrica con la dada y de radio el segmento $\overline{OM}$ **(Fig. 10)**.

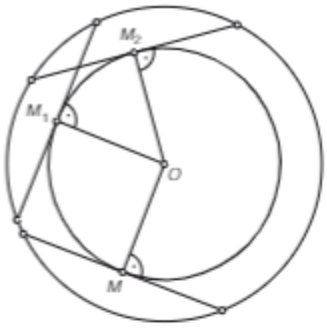


Fig. 10

9 LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS PUNTOS DEL PLANO CUYA RAZÓN DE DISTANCIAS A DOS PUNTOS DADOS *A* Y *B* SEA CONSTANTE E IGUAL A *p/q*

Pasos:

1º Se dibuja el triángulo ABC de lados: $\overline{AB}$, p y q.

2º Las bisectrices interior y exterior en C (perpendiculares por tratarse de ángulos adyacentes) cortan el segmento $\overline{AB}$ y su prolongación en D y E **(Fig. 11)**.

3º Por el teorema del seno:

- En el triángulo ADC: $\dfrac{\overline{AD}}{\text{sen}\,\frac{C}{2}} = \dfrac{p}{\text{sen}\,\delta}$

- En el triángulo DBC: $\dfrac{\overline{BD}}{\text{sen}\,\frac{C}{2}} = \dfrac{q}{\text{sen}\,(180º - \delta)}$

y como $\text{sen}\,\delta = \text{sen}\,(180º - \delta)$: $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \dfrac{p}{q}$

-Por la misma razón, se cumple: $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \dfrac{p}{q}$

4º El lugar geométrico de los puntos C es una circunferencia de diámetro $\overline{DE}$, ya que las bisectrices en C de los triángulos ABC (siendo C un punto de la circunferencia) forman un triángulo rectángulo en C de hipotenusa $\overline{DE}$.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{p}{q} = \frac{x}{y}$$

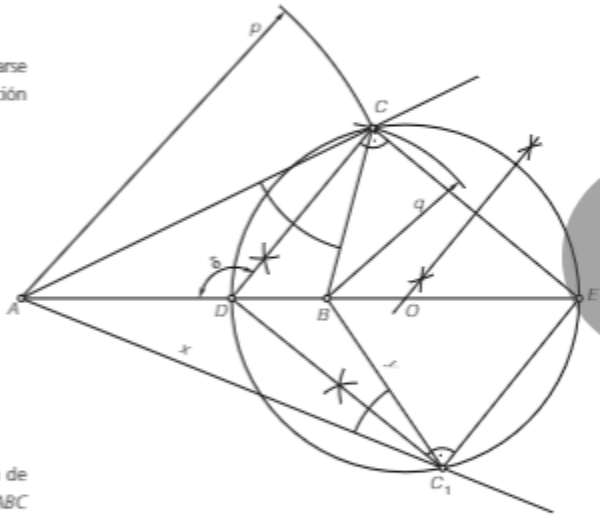


Fig. 11

10 LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL ESPACIO

Lugar geométrico es el conjunto de puntos del espacio que cumplen una determinada propiedad.

10.1. Lugar geométrico de los puntos del espacio que se encuentran a una misma distancia *d* de un punto dado *A*

El lugar geométrico pedido es una esfera de centro A y radio d.

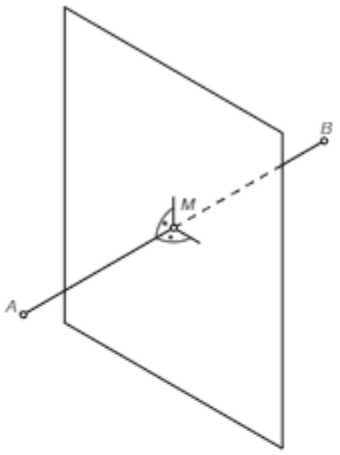


Fig. 12

10.2. Lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de otros dos dados *A* y *B*

El lugar geométrico pedido (Fig. 12) es el plano perpendicular al segmento dado $\overline{AB}$ por su punto medio (plano mediatriz).

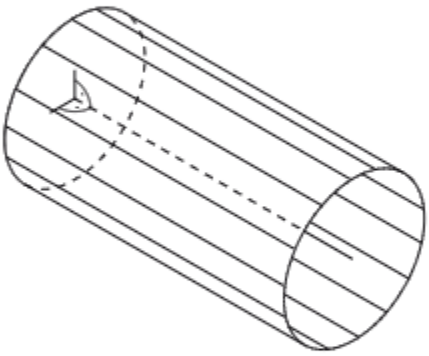


Fig. 13

10.3. Lugar geométrico de los puntos del espacio que se encuentran a una misma distancia *d* de una recta dada *r*

El lugar geométrico pedido (Fig. 13) es una superficie cilíndrica de revolución de radio *d*.

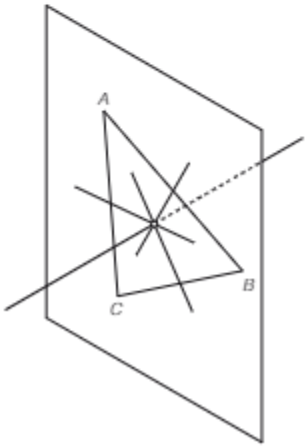


Fig. 14

10.4. Lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de tres puntos dados no alineados

El lugar geométrico pedido (Fig. 14) es una recta *r* perpendicular al plano definido por los puntos dados y que pasa por el circuncentro (intersección de las mediatrices) del triángulo que definen.

10.5. Lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de una circunferencia

El lugar geométrico pedido es una recta *r* perpendicular al plano que contiene a la circunferencia y que pasa por su centro.

11 CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE

Un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia cuando sus cuatro vértices son puntos de la misma.

Por ser α y β ángulos inscritos, se cumple que valen la mitad del central que abarca el mismo arco.

Como $2\alpha+2\beta = 360^\circ$, se cumple que $\alpha+\beta = 180^\circ$, es decir, que los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios **(Fig. 15)**.

Para que un cuadrilátero sea inscriptible a una circunferencia ha de ocurrir que dos ángulos opuestos sean suplementarios.

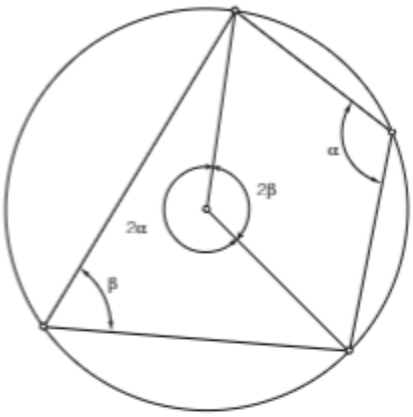


Fig. 15

12 RECTAS ANTIPARALELAS

Dos rectas *r* y *s* son antiparalelas respecto a otras dos *u* y *v* cuando los ángulos α son iguales.

Es decir, cuando el ángulo de *r* respecto de una de ellas (por ejemplo: la *v*) es igual al que forma la *s* con la otra recta, la *u* **(Fig. 16)**.

El ángulo β es suplementario del α, y, por tanto, el cuadrilátero formado por rectas antiparalelas es inscriptible en una circunferencia.

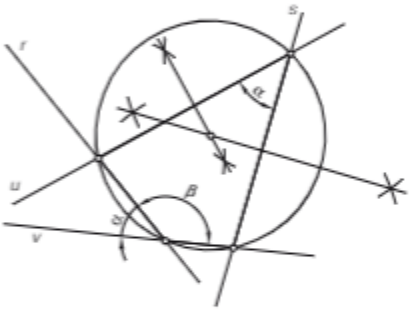


Fig. 16

13 CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR LOS EXTREMOS DEL SEGMENTO *AB* Y CORTAN A LOS LADOS *a* Y *b* DEL TRIÁNGULO *AVB* SEGÚN CUERDAS PARALELAS

Los cuadriláteros ABC_1D_1 y ABC_2D_2 están inscritos, cada uno, en una circunferencia por lo que los ángulos $\hat{C}_1$ y $\hat{C}_2$ han de ser suplementarios de $\hat{A}$, y por la misma razón $\hat{D}_1$ y $\hat{D}_2$ suplementarios de $\hat{B}$.

Es decir, $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ y $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$, por lo que los segmentos $\overline{C_1D_1}$ y $\overline{C_2D_2}$ son paralelos **(Fig. 17)**.

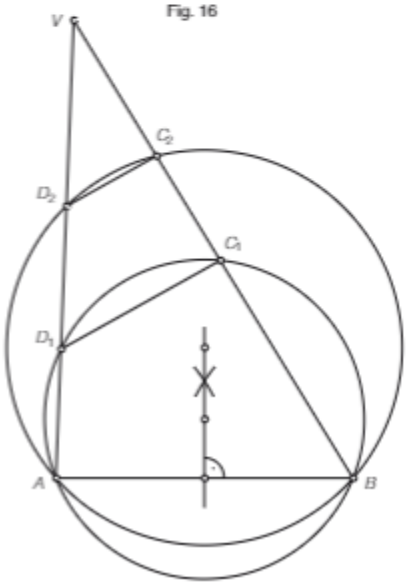


Fig. 17

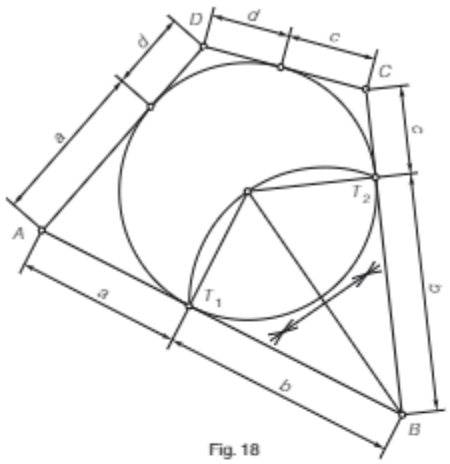


Fig. 18

14 CUADRILÁTERO CIRCUNSCRIPTIBLE

Un cuadrilátero está circunscrito a una circunferencia cuando sus cuatro lados son tangentes a la misma **(Fig. 18)**.

Para que un cuadrilátero sea circunscriptible a una circunferencia ha de ocurrir que las sumas de las longitudes de lados opuestos coincidan.

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DA}=a+b+c+d$$

15 ÁNGULO DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Ángulo de dos circunferencias es el que forman las tangentes a ambas en un punto común **(Fig. 19)**.

Si las tangentes en un punto común a dos circunferencias forman 90º, se dice que las circunferencias se cortan ortogonalmente **(Fig. 20)**. Como la perpendicular a una tangente en el punto de tangencia pasa por el centro de la circunferencia, en el caso de circunferencias ortogonales cada tangente pasa por el centro de la otra circunferencia.

Si las tangentes en un punto común a dos circunferencias forman 0º, las tangentes coinciden y las circunferencias son tangentes, interiores o exteriores, entre sí **(Fig. 21)**.

Si el ángulo de las tangentes es ≠0, las circunferencias serán secantes.

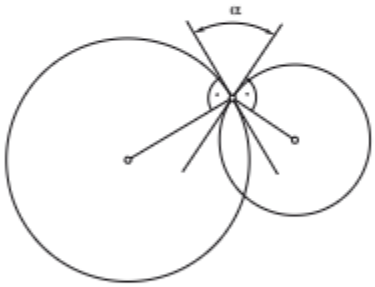


Fig. 19

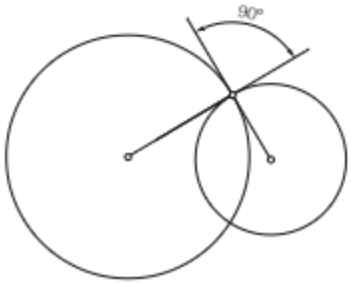


Fig. 20

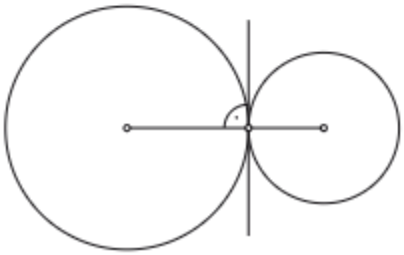


Fig. 21

Actividades complementarias

1 Indica y define otros lugares geométricos no estudiados.

2 Indica cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a otros dos puntos fijos es constante.

3 Indica cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es constante.

4 Indica los cuadriláteros que son siempre inscriptibles.

5 Indica los cuadriláteros que son siempre circunscriptibles.

6 Determina y justifica el lugar geométrico de los puntos del plano que son centro de las circunferencias que se cortan ortogonalmente con otra dada en un punto de esta.