CUESTIONES INICIALES de la página 10

1. Simplifica y expresa el resultado como potencia:

a) $9^2 \cdot 3^{-2} \cdot 27$ **b)** $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^{-2} \cdot 25$ **c)** $\frac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{9^3 \cdot 25^3 \cdot 4^4}$

Teniendo en cuenta las propiedades de las potencias, obtenemos:

a) $9^2 \cdot 3^{-2} \cdot 27 = (3^2)^2 \cdot 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^{4-2+3} = 3^5$

b) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^{-2} \cdot 25 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-6} \cdot 5^2 = 5^6 \cdot 5^2 = 5^8$

c) $\frac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{9^3 \cdot 25^3 \cdot 4^4} = \frac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^8} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$

2. Determina los valores aproximados de $\sqrt{0,6} = 0,774\ 596\ 6...$ **y** $\sqrt{6} = 2,449\ 489\ 7...$ **truncando o redondeando:**

a) A las décimas **b) A las milésimas** **c) A las millonésimas**

En las tablas aparecen los valores pedidos.

Truncamiento de	$\sqrt{0,6} = 0,774\ 596\ 6...$	$\sqrt{6} = 2,449\ 489\ 7...$
a) A las décimas	0,7	2,4
b) A las milésimas	0,774	2,449
c) A las millonésimas	0,774 596	2,449 489

Redondeo de	$\sqrt{0,6} = 0,774\ 596\ 6...$	$\sqrt{6} = 2,449\ 489\ 7...$
a) A las décimas	0,8	2,4
b) A las milésimas	0,775	2,449
c) A las millonésimas	0,774 597	2,449 490

3. Comprueba la siguiente igualdad elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\sqrt{11-4\sqrt{6}}=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos:

$$\left(\sqrt{11-4\sqrt{6}}\right)^2=11-4\sqrt{6}$$

$$\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=8+3-4\sqrt{6}=11-4\sqrt{6}$$

4. ¿Para qué valores de n y a se cumple $\sqrt[n]{a}\in R$?

Las raíces enésimas son números reales siempre que:

- **n** sea par y **a** sea un número real no negativo.
- **n** sea impar y **a** sea un número real cualquiera.

ACTIVIDADES de la página 17

1. Expresa cada uno de los siguientes conjuntos en forma de intervalo y represéntalo gráficamente.

a) A = $\{x\in R\ /\ -6\le x\le 1\ y\ -1\le x\le 6\}$

b) $B=[-1,2)\cup\left([-2,2]\cap(-1,3]\right)$

c) C = $\{x\in R\ /\ |x|<5\ \}$

d) D = E^* **(2, 5)** $\cup[2,+\infty)$

Los conjuntos resultantes y sus representaciones gráficas son:

a) A = [- 1, 1]

b) B = [- 1, 2]

c) C = (- 5, 5)

d) D = $(-3,+\infty)$

2. Encuentra, en cada caso, el intervalo en el que se encuentra el número x y estudia su acotación y la existencia o no de extremos absolutos.

a) x ≥ - 3 **b) 0 < x + 2 ≤ 7** **c) – x > 2** **d)** $|x-1| \leq 1$

a) El intervalo es $[-3, +\infty)$. Está acotado inferiormente, pero no superiormente, por tanto no está acotado. El ínfimo es - 3 y es mínimo absoluto. No tiene supremo ni máximo absoluto.

b) El intervalo es (- 2, 5]. Está acotado superior e inferiormente, por lo cual está acotado. Tiene ínfimo que es - 2, pero no es mínimo absoluto. Tiene supremo que es 5 y es máximo absoluto.

c) El intervalo es $(-\infty, -2)$. Está acotado superiormente pero no inferiormente, por tanto no está acotado. Tiene supremo que es - 2, pero no es máximo absoluto y no tiene ínfimo ni mínimo absoluto.

d) El intervalo es [0, 2]. Está acotado superior e inferiormente, lo que hace estar acotado. Tiene ínfimo que es 0 y es mínimo absoluto. Tiene supremo que es 2 y es máximo absoluto.

ACTIVIDADES de la página 18

3. Dado el número de oro Φ = 1,61803398…, calcula las siguientes aproximaciones decimales:

a) A unidades por exceso.

b) A centésimas por defecto.

Las aproximaciones pedidas son: a) 2 y b) 1,61.

4. Halla en cada caso dos números que sean valores exactos de las aproximaciones decimales dadas:

a) La aproximación decimal por exceso a décimas es 7,5.

b) La aproximación decimal por defecto a diezmilésimas es 641, 3526.

Los números que se piden pueden ser, por ejemplo: a) 7,42 y 7,475 y b) 641,352613 y 641,352682.

ACTIVIDADES de la página 20

5. Completa la siguiente tabla:

Valor exacto	Aproximación decimal a centésimas por defecto y cota de error	Aproximación decimal a décimas por exceso y cota de error	Redondeo a milésimas y cota de error	Truncamiento a milésimas y cota de error
Φ = 1,61803…				
π = 3,14159…				
e = 2,71828…				
$\sqrt{2} = 1,41421...$				

La tabla completa aparece a continuación:

Valor exacto	Aproximación decimal a centésimas por defecto y cota de error	Aproximación decimal a décimas por exceso y cota de error	Redondeo a milésimas y cota de error	Truncamiento a milésimas y cota de error
Φ = 1,61803…	aproximación:1,61 cota de error: 0,01	aproximación:1,7 cota de error: 0,1	redondeo:1,618 cota de error: 0,0005	truncamiento:1,618 cota de error: 0,001
π = 3,14159…	aproximación:3,14 cota de error: 0,01	aproximación:3,2 cota de error: 0,1	redondeo:3,142 cota de error: 0,0005	truncamiento:3,141 cota de error: 0,001
e = 2,71828…	aproximación:2,71 cota de error: 0,01	aproximación:2,8 cota de error: 0,1	redondeo:2,718 cota de error: 0,0005	truncamiento:2,718 cota de error: 0,001
$\sqrt{2} = 1,41421...$	aproximación:1,41 cota de error: 0,01	aproximación:1,5 cota de error: 0,1	redondeo:1,414 cota de error: 0,0005	truncamiento:1,414 cota de error: 0,001

6. Tomando como valor exacto del número cordobés $\theta = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = 1{,}30656296...$, halla la aproximación a milésimas por defecto y por exceso y los errores absoluto y relativo que se cometen en cada una de ellas. ¿Cuál de estas aproximaciones crees que sería mejor?

La aproximación a milésimas por defecto es 1,306.

El error absoluto que se comete es: |1,30656296… - 1,306| = 0,00056296.

El error relativo que se comete es: $\frac{0{,}00056296...}{1{,}30656296...} = 0{,}00043087093...$

La aproximación a milésimas por exceso es 1,307.

El error absoluto que se comete es: |1,30656296… - 1,307| = 0,00043704….

El error relativo que se comete es: $\frac{0{,}00043704...}{1{,}30656296...} = 0{,}00033449593...$

En este caso, es mejor la aproximación por exceso, ya que su valor produce un error absoluto y un error relativo menor que la aproximación por defecto.

ACTIVIDADES de la página 21

7. Expresa en notación científica e indica el orden de magnitud en cada caso:

a) 57 billones **b) 623 cienmillonésimas** **c) 0,035 millones** **d) 12 milésimas**

Las expresiones buscadas y los órdenes de magnitud son:

a) 57 billones = 57 000 000 000 000 = $57 \cdot 10^{12} = 5{,}7 \cdot 10^{13}$. La cantidad cumple: $10^{13} < 5{,}7 \cdot 10^{13} < 10^{14}$ y el orden de magnitud es 10^{14}.

b) 623 cienmillonésimas = 623 · 0,000 000 01 = 0,000 006 23 = $6{,}23 \cdot 10^{-6}$. La cantidad cumple: $10^{-6} < 6{,}23 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$ y el orden de magnitud es 10^{-5}.

c) 0,035 millones =0,035 · 10^6 = 35 000 = 3,5 · 10^4. La cantidad cumple: $10^4 < 3{,}5 \cdot 10^4 < 10^5$ y el orden de magnitud es 10^4.

d) 12 milésimas = 12 · 0,001 = 0,012 = 1,2 · 10^{-2}. La cantidad cumple: $10^{-2} < 12 \cdot 10^{-2} < 10^{-1}$ y el orden de magnitud es 10^{-2}.

8. Efectúa las siguientes operaciones utilizando la calculadora e indica el orden de magnitud del resultado:

a) (2,32 · 10^4) · (7,2 · 10^{-3}) **b) (6,215 · 10^5) : (3,25 · 10^{-2})**

Los resultados y los órdenes de magnitud son:

a) (2,32 · 10^4) · (7,2 · 10^{-3}) = 167,04 = 1,6704 · 10^2. La cantidad cumple: $10^2 < 1{,}6704 \cdot 10^2 < 10^3$ y el orden de magnitud es 10^2.

b) (6,215 · 10^5) : (3,25 · 10^{-2}) = 19123076,92 = 1,912307692 · 10^7. La cantidad cumple: $10^7 < 1{,}912307892 \cdot 10^7 < 10^8$ y el orden de magnitud es 10^7.

ACTIVIDADES de la página 22

9. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt{128}$ **d)** $\sqrt[3]{-64a^{12}b^{18}c^{13}}$ **g)** $\sqrt{\frac{3^{11}}{a^8}}$ **j)** $\sqrt{125a^{15}b^{16}}$

b) $\sqrt{a^8b^3}$ **e)** $\sqrt[3]{0{,}001a^6}$ **h)** $\sqrt[4]{2401x^{15}}$ **k)** $\sqrt[4]{\frac{81x^6}{y^2}}$

c) $\sqrt[8]{x^2}$ **f)** $\sqrt[5]{-32a^7b^6c^{10}}$ **i)** $\sqrt[6]{16y^8}$ **l)** $\sqrt{a^2+a^4}$

Teniendo en cuenta los radicales equivalentes, en cada caso, los radicales simplificados son:

a) $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

b) $\sqrt{a^8 b^3} = a^4 b\sqrt{b}$

c) $\sqrt[8]{x^2} = \sqrt[4]{x}$

d) $\sqrt[3]{-64a^{12}b^{18}c^{13}} = -4a^4 b^6 c^4 \sqrt[3]{c}$

e) $\sqrt[3]{0{,}001a^6} = 0{,}1a^2$

f) $\sqrt[5]{-32a^7 b^6 c^{10}} = -2abc^2 \sqrt[5]{a^2 b}$

g) $\sqrt{\frac{3^{11}}{a^8}} = \frac{3^5\sqrt{3}}{a^4}$

h) $\sqrt[4]{2401x^{15}} = 7x^3 \sqrt[4]{x^3}$

i) $\sqrt[6]{16y^8} = y\sqrt[3]{4y}$

j) $\sqrt{125a^{15}b^{16}} = 5a^7 b^8 \sqrt{5a}$

k) $\sqrt[4]{\frac{81x^6}{y^2}} = 3x\sqrt{\frac{x}{y}}$

l) $\sqrt{a^2 + a^4} = a\sqrt{1 + a^2}$

ACTIVIDADES de la página 23

10. Efectúa las siguientes operaciones con potencias y da el resultado en forma de potencia y en forma radical:

a) $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$ **b)** $2^{\frac{3}{2}} : 2^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ **c)** $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{4}{3}} : \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ **d)** $\dfrac{5^{\frac{4}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{4}}}{0{,}2^{\frac{3}{2}}}$

Los resultados de estas operaciones en forma de potencia y en forma radical son:

a) $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = \ldots = 3^{\frac{29}{12}} = \sqrt[12]{3^{29}} = 9\sqrt[12]{3^{5}}$

b) $2^{\frac{3}{2}} : 2^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$

c) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{4}{3}} : \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{13}{12}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{13}{12}} = \sqrt[12]{\left(\frac{3}{5}\right)^{13}} = \frac{3}{5}\sqrt[12]{\frac{3}{5}}$

d) $\dfrac{5^{\frac{4}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{4}}}{0{,}2^{\frac{3}{2}}} = \ldots = 5^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{5^{10}} = 125\sqrt[3]{5}$

11. En cada uno de las siguientes igualdades, halla el valor de m para el cual se verifique la misma:

a) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{2} : \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{3}{7}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^{m}}$ **b)** $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{4}} : \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

Los valores de m buscados son: a) m = 3 y b) $m = \frac{1}{6}$.

ACTIVIDADES de la página 25

12. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{72}-4\sqrt{8}-\sqrt{98}$

b) $2\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{250}+5\sqrt[3]{54}$

c) $\left(5\sqrt[4]{32}-2\sqrt[4]{162}\right)\cdot\sqrt[4]{8}$

d) $\left(2\sqrt{5}-3\right)^2$

e) $\sqrt[4]{5^3\sqrt{5^4\sqrt[3]{5^2}}}$

f) $\dfrac{3\sqrt{27}-2\sqrt{12}+5\sqrt{75}}{4\sqrt{3}}$

Los resultados de las operaciones son:

a) $3\sqrt{72}-4\sqrt{8}-\sqrt{98}=\ldots=3\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{250}+5\sqrt[3]{54}=\ldots=4\sqrt[3]{2}$

c) $\left(5\sqrt[4]{32}-2\sqrt[4]{162}\right)\cdot\sqrt[4]{8}=\ldots=8$

d) $\left(2\sqrt{5}-3\right)^2=\ldots=29-12\sqrt{5}$

e) $\sqrt[4]{5^3\sqrt{5^4\sqrt[3]{5^2}}}=\ldots=5\sqrt[3]{5}$

f) $\dfrac{3\sqrt{27}-2\sqrt{12}+5\sqrt{75}}{4\sqrt{3}}=\ldots=\dfrac{15}{2}$

4. Racionaliza y opera lo más posible:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{25}{\sqrt[3]{5^2}}-\sqrt[3]{625}$

c) $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}-3}$

Los resultados de la racionalización son:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\ldots=2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$

b) $\frac{25}{\sqrt[3]{5^2}} - \sqrt[3]{625} = ... = 0$

c) $\frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}-3} = ... = 7 + 4\sqrt{3}$

ACTIVIDADES de la página 27

1. Los mentís y los verdís. En un planeta lejano viven dos comunidades de extraterrestres, los mentís y los verdís. Los mentís, haciendo honor a su nombre, siempre mienten; en cambio, los verdís siempre dicen la verdad. Un terrícola llegó a este planeta y se encontró con tres de sus habitantes. Uno le dijo algo que no entendió; el siguiente le dijo: «te ha dicho que es un mentís», a lo que el último le contestó a este: «tú eres un mentiroso». Esta última persona, ¿era mentís o verdís?

Analizamos en la tabla todos los casos posibles, considerando la notación siguiente: a los mentís con M y a los verdís con V.

CASOS			
	Primero	Segundo	Tercero
1	M	M	M
2	M	M	V
3	M	V	M
4	V	M	M
5	V	V	M
6	V	M	V
7	M	V	V
8	V	V	V
LO QUE DICE CADA UNO		***Te he dicho que es un mentís***	**Tú eres un mentiroso**

Los únicos casos que nos plantean una contradicción con el enunciado del problema son el tercero y el sexto.

● El caso tercero no es posible pues si el segundo es un verdís no puede decir «te ha dicho que es un mentís» ya que el anterior es un mentís y como mentiroso que es nunca diría soy un mentís.

● El caso sexto es válido pues:

- El primero es un verdís y habría dicho «soy un verdís».
- El segundo es un mentís, con lo cual, como miente, dice «te he dicho que es un mentís».
- El tercero es un verdís y como dice la verdad dice «tú eres un mentiroso».

Por tanto, los tres habitantes con los que se encontró el terrícola eran, en este orden: **verdís, mentís, verdís.**

Este es un problema de lenguaje lógico en cuya resolución, además de usar el razonamiento lógico hemos utilizado una notación adecuada a la situación.

2. División. El resultado de dividir dos números naturales de dos cifras en una calculadora ha sido 0,75609756. ¿Cuáles eran esos dos números?

Multiplicamos el número dado 0,75609756 por números de dos cifras hasta que nos de un número natural, así:

$$0{,}75609756 \cdot 41 = 30.99999996$$

Por tanto, la solución es $\frac{31}{41} = 0{,}75609756$.

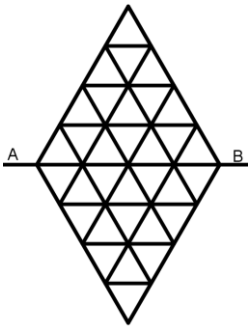
3. Repartir agua. Tenemos un gran depósito de agua y dos vasijas de 4 litros y 9 litros. ¿Cómo conseguir exactamente 6 litros?

A continuación, se describe una solución.

Acción	1	2	3	4	5	6	7	8
Vasija 4 L	0	4	0	4	0	1	1	4
Vasija 9 L	9	5	5	1	1	0	9	6

4. Colores coincidentes. Cada una de las dos mitades de esta figura está compuesta por 16 triángulos pequeños, de los cuales hay coloreados 3 de rojo, 5 de azul y 8 de verde. Al doblar la figura por la recta AB resulta que se superponen dos pares de triángulos rojos, tres pares de azules y encontramos dos pares rojo-verde.

¿Cuántos pares de triángulos verdes coinciden?



Buscamos una notación adecuada. Por ejemplo, llamamos R, A y V a los triángulos de color rojo, azul y verde, respectivamente.

A los 16 triángulos de arriba podemos nombrarlos de la forma:

R R R A A A A AV V V V V V V V

Con los datos que nos dan podemos escribir emparejando los triángulos, en la primera línea los triángulos de arriba y en la segunda línea los de abajo:

R R R A A A A A V V V V V V V V

R R V A A A R

En el diagrama anterior observamos que ya hemos ocupado todos los rojos, 1 de los verdes y 3 azules de la parte inferior.

Los dos azules que nos quedan no pueden ir con los azules, deberían ir con los verdes, lo que nos conduce a:

R R R A A A A A V V V V V V V V

R R V A A A R A A

Así pues, nos quedan 7 verdes en la parte inferior, de los cuales dos irán con azules y cinco acompañaran a verdes de la parte superior, por lo que son 5 los pares de triángulos verdes que coinciden.

MATEMÁTICAS de la página 28

1. Efectúa estas operaciones simplificando los resultados:

a) $\left[\frac{2}{7}\cdot\left(3-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{5}{7}$

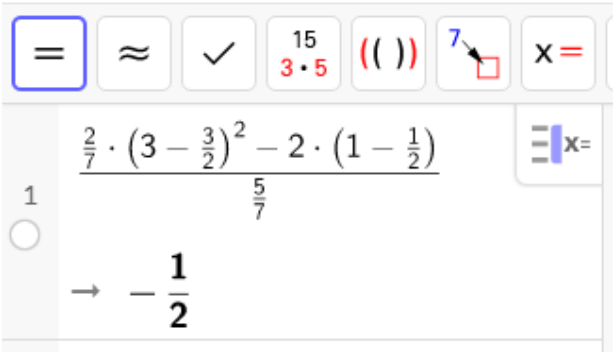
b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$

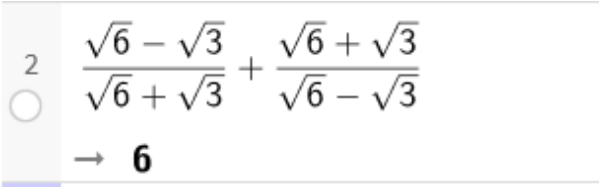
Las soluciones de las operaciones son:

a) $\left[\frac{2}{7}\cdot\left(3-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{5}{7}=\ldots=-\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\ldots=6$

Las soluciones anteriores pueden verse en la imagen.





ACTIVIDADES FINALES de la página 29

1. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

	$-\sqrt{49}$	**23,5**	**0**	$\sqrt{11}$	$2,1\widehat{3}$	$-\frac{1,4}{0,5}$	$\frac{23}{3}$	**- 4²**	$\sqrt[3]{-27}$	$\frac{\pi}{5}$
Menor conjunto numérico al que pertenece										

Las soluciones pueden verse en la tabla.

	$-\sqrt{49}$	**23,5**	**0**	$\sqrt{11}$	$2,1\widehat{3}$	$-\frac{1,4}{0,5}$	$\frac{23}{3}$	**- 4²**	$\sqrt[3]{-27}$	$\frac{\pi}{5}$
Menor conjunto numérico al que pertenece	**Z**	**Q**	**N**	**R**	**Q**	**Q**	**Q**	**Z**	**Z**	**I**

2. Explica la verdad o la falsedad de las siguientes afirmaciones poniendo un ejemplo o contraejemplo en cada una de ellas:

a) Todo número real es irracional.

b) Algún número racional es entero.

c) Ningún número entero es decimal.

d) Todo número decimal es racional.

Las siguientes afirmaciones son:

a) Falsa, el número 5, por ejemplo, es real (entero) y no es irracional.

b) Verdadera, por ejemplo, $\frac{15}{3} = 5$ es racional y entero.

c) Verdadera, los números enteros no son decimales.

d) Falsa, los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas no son números racionales.

3. Representa en la recta real los siguientes números y conjuntos:

a) $3\sqrt{2}$

b) $-\sqrt{8}$

c) $-\dfrac{18}{\sqrt{9}}$

d) $0,\widehat{6}$

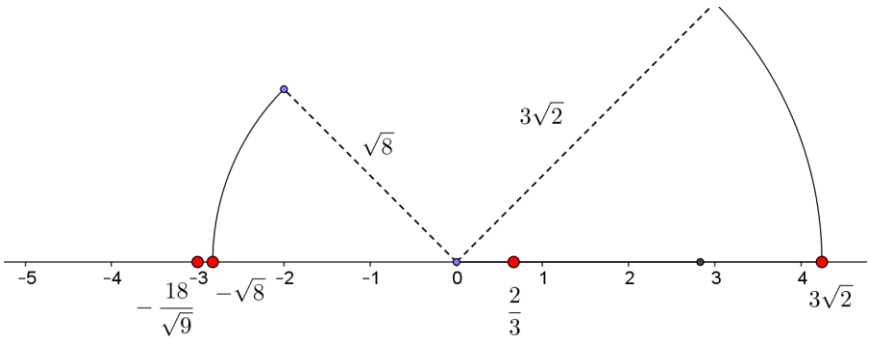
e) A = $\{a \in R \,/\, a < -2 \text{ y } a > -6\}$

f) E (2, 3)

g) $B = \{x \in Z \,/\, x > 4 \text{ ó } x > -4\}$

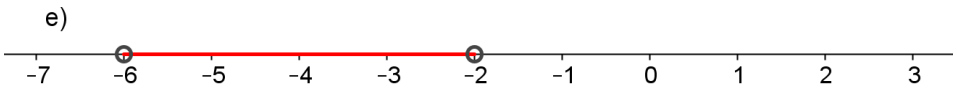
h) $(-\infty, -3) \cap [-4, 3]$

Representación de los números: a) $3\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{8}$ c) $-\dfrac{18}{\sqrt{9}} = -3$ d) $0,\widehat{6} = \dfrac{2}{3}$

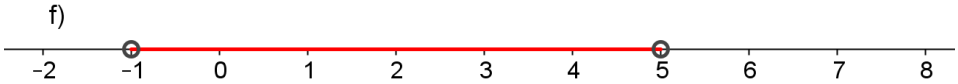


Representación de los conjuntos:

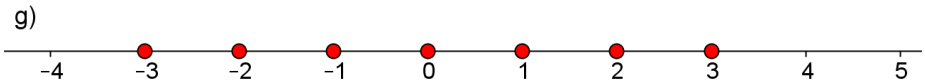
e) A = $\{a \in R \,/\, a < -2 \text{ y } a > -6\}$ = (- 6, - 2)



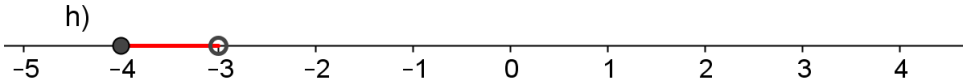
f) E (2, 3) = (- 1, 5)



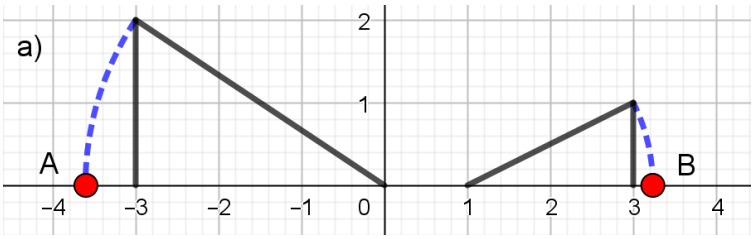
g) $B = \{x \in Z \ / \ x > 4 \text{ ó } x > -4\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6...\}$

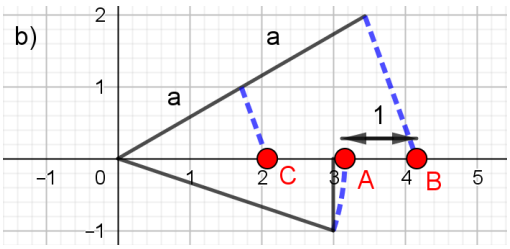


h) $(-\infty, -3) \cap [-4, 3] = [-4, -3)$



4. Teniendo en cuenta que a es un segmento cualquiera, ¿qué números representan, en cada construcción, los puntos A, B y C? Describe la construcción de cada uno de los puntos.





Los números representados son:

a) El punto A se corresponde con el número $-3-\sqrt{13}$. Es la suma del número – 3 con la longitud de la hipotenusa (tomada con valor negativo) de un triángulo rectángulo de catetos 2 y 3.

El punto B se corresponde con el número $1+\sqrt{5}$. Es la suma de 1 con la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y 2.

b) El punto A está asociado con el número $\sqrt{10}$. Es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y 3.

El punto B está asociado con el número $1+\sqrt{10}$. Es la suma del número 1 (distancia entre los puntos A y B) con la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y 3.

El punto C está asociado con el número $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$. Su posición coincide con la mitad de la longitud del segmento OB, debido a la construcción con segmentos proporcionales.

5. Ordena de menor a mayor, los números reales: $\frac{\sqrt{2}}{2}; 0,\overline{71}, \frac{5}{6}, \frac{71}{100}, 0,\overline{83}$ *y* $0,70\overline{5}$.

Para comparar varios números reales, se puede recurrir a las primeras cifras de su expresión decimal.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=0,7071... \quad 0,\overline{71}=0,7171... \quad \frac{5}{6}=0,8333... \quad \frac{71}{100}=0,71 \quad 0,\overline{83}=0,8383... \quad 0,70\overline{5}=0,7055...$$

Por tanto, la ordenación buscada es: $0,70\overline{5} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{71}{100} < 0,\overline{71} < \frac{5}{6} < 0,\overline{83}$.

6. Expresa en forma de intervalo, cuando sea posible, y estudia la acotación de los siguientes conjuntos, determinando la existencia de supremo, ínfimo, máximo y/o mínimo:

a) E (6, 5)

b) $(-3, 2) \cap [-1, 3]$

c) $[-3, +\infty) \cup [-5, 4]$

d) $D = \{n \in N \,/\, n > 2 \text{ y } n < 11\}$

e) $\{x \in R \,/\, x \leq 2 \text{ y } x \geq -2\} \cup \{x \in R \,/\, x > 0\}$

f) $F = \{f \in R \,/\, f < 2 \text{ ó } f < 6\}$

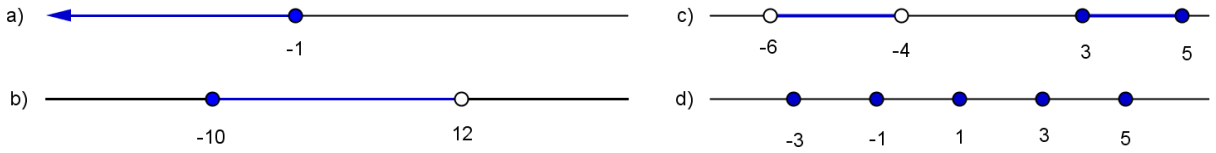
g) $E(-2, 4) \cap E^{*}(2, 4)$

h) $E^{+}(-6, 2) \cup E^{-}(-6, 2) \cup \{-6\}$

La respuesta puede verse en la tabla que sigue.

Apartado	Conjunto	Acotado	Supremo	Ínfimo	Máximo	Mínimo
a)	(1, 11)	Si	11	1	No	No
b)	[- 1, 2)	Si	2	- 1	No	- 1
c)	$[-5, +\infty)$	No	No	- 5	No	- 5
d)	{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	Si	10	3	10	3
e)	$[-2, +\infty)$	No	No	- 2	No	- 2
f)	$(-\infty, 6)$	No	6	No	No	No
g)	(- 2, 2)	Si	2	- 2	No	No
h)	(- 8, - 4)	Si	- 4	- 8	No	No

7. Escribe cada uno de los siguientes conjuntos en forma simbólica y de intervalo cuando sea posible., Estudia la acotación y la existencia de supremo, ínfimo, máximo y mínimo.



Las soluciones pueden verse en la tabla.

Apartado	Conjunto	Acotado	Supremo	Ínfimo	Máximo	Mínimo
a)	$(-\infty, -1]$	No	- 1	No	-1	No
b)	[- 10, 12)	Si	12	- 10	No	- 10
c)	$(-6, -4) \cup [3, 5]$	Si	5	- 6	5	No
d)	{- 3, - 1, 1, 3, 5}	Si	5	- 3	5	- 3

ACTIVIDADES FINALES de la página 30

8. Escribe, en forma de desigualdad, la condición que verifica un número x que está en cada uno de los siguientes intervalos:

a) (- 3, - 1] **b) [- 2, 5)** **c)** $(-\infty, 1]$ **d)** $[\sqrt{3}, \pi]$

En cada caso, las desigualdades son:

a) $-3 < x \leq -1$ b) $-2 \leq x < 5$ c) $x \leq 1$ d) $\sqrt{3} \leq x \leq \pi$

9. Encuentra, en cada caso, el intervalo donde se encuentra un número x que cumple:

a) 2 ≥ x **b) 5 – x < - 4** **c)** $|2x+5| \geq 3$ **d)** $\frac{2}{3} < -x \leq \frac{4}{5}$

a) Todos los números reales menores o iguales que 2 se encuentran en el intervalo $(-\infty, 2]$.

b) Operando en la desigualdad obtenemos x > 9. El intervalo buscado es $(9, +\infty)$.

c) Si resolvemos la inecuación, obtenemos:

$$|2x+5| \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x+5 \geq 3 \Rightarrow 2x \geq -2 \Rightarrow x \geq -1 \\ -2x-5 \geq 3 \Rightarrow -2x \geq 8 \Rightarrow x \leq -4 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [-1, +\infty).$$

d) Si se multiplica por – 1 la doble desigualdad, se obtiene $-\frac{4}{5} \leq x < -\frac{2}{3}$, es decir, que corresponde al intervalo $\left[-\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}\right)$.

10. Halla el centro y el radio del entorno al que corresponde el intervalo (- 3, 6).

El centro es el punto $\frac{-3+6}{2} = 1{,}5$ y el radio vale 6 – 1,5 = 4,5.

Por tanto, el entorno buscado es E (1,5; 4,5)

11. Completa la tabla siguiente en tu cuaderno:

Valor exacto				**32,55628…**	
Aproximación decimal a décimas por defecto y cota de error		**218,7** **0,1**			
Aproximación decimal a milésimas por exceso y cota de error.					**3,425** **0,001**
Redondeo a centésimas y cota de error			**0,08** **0,005**		
Truncamiento a diezmilésimas y cota de error.	**0,6543** **0,0001**				

La tabla completa puede verse a continuación:

Valor exacto	0,654371…	218,75364…	0,07642…	**32,55628…….**	3,42456…
Aproximación decimal a décimas por defecto y cota de error	0,6 0,1	**218,7** **0,1**	0,0 0,1	32,5 0,1	3,4 0,1
Aproximación decimal a milésimas por exceso y cota de error	0,655 0,001	218,754 0,001	0,077 0,001	32,557 0,001	**3,425** **0,001**
Redondeo a centésimas y cota de error	0,65 0,005	218,75 0,005	**0,08** **0,005**	32,56 0,005	3,42 0,005
Truncamiento a diezmilésimas y cota de error	**0,6543** **0,0001**	218,7536 0,0001	0,0764 0,0001	32,5562 0,0001	3,4245 0,0001

12. Arquímedes llegó a determinar que el valor de π cumple $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ .Calcula, aproximadamente, el error absoluto y relativo que se comete al tomar cada una de las fracciones como valor aproximado de π. ¿Con cuál se comete menor error relativo?

Consideramos como valor real π = 3,141592.

Para la fracción $\frac{223}{71}$ obtenemos:

$$\text{Error absoluto} = \left|3{,}141592 - \frac{223}{71}\right| = 0{,}000\ 746...$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\textit{Error absoluto}}{\textit{Valor real}} = \frac{0{,}000\ 746}{3{,}141592} = 0{,}000\ 237...$$

Para la fracción $\frac{22}{7}$ obtenemos:

$$\text{Error absoluto} = \left|3{,}141592 - \frac{22}{7}\right| = 0{,}001\,265...$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\textit{Error absoluto}}{\textit{Valor real}} = \frac{0{,}001\,265}{3{,}141592} = 0{,}000\,4022...$$

Se comete menor error relativo al tomar la fracción $\frac{223}{71}$.

13. Supón que dispones de una cuerda muy fina de 1 m de longitud que vas doblando, sucesivamente, por la mitad. ¿Qué longitud tendrá cuando la hayas doblado cinco veces? ¿Y cuando la hayas doblado diez veces? ¿Crees que podrías hacerlo?

Cada vez que se dobla la cuerda, su longitud se reduce a la mitad. Así, después de doblarla la primera vez, la longitud será $\frac{1}{2} \cdot 1 = 0{,}5\ m$, después de la segunda será de $\frac{1}{2^2} \cdot 1 = 0{,}25\ m$ y, así, sucesivamente, después de doblarla 5 veces, su longitud será:

$$\frac{1}{2^5} \cdot 1 = 0{,}03125\ m = 31{,}25\ mm.$$

Seguimos doblando, y después de doblarla 10 veces, su longitud será:

$$\frac{1}{2^{10}} \cdot 1 = \frac{1}{1024} \cdot 1 = 9{,}765625 \cdot 10^{-4}\ m = 0{,}9765625\ mm$$

Obviamente estos últimos dobleces no podemos hacerlos ya que las longitudes de la cuerda son muy pequeñas y no podemos manejarla.

14. En la siguiente tabla aparecen las distancias medias, en km, de los planetas al Sol. Sabiendo que 1 ua (unidad astronómica) son 149 597 870 700 m, halla estas distancias en ua, exprésalas en notación científica y determina en cada una de ellas el orden de magnitud.

Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
57909175	108208930	149597870	227936640	778412010	1426725400	2870872200	4498252900

En la tabla aparecen los resultados:

Planeta	Distancia media al Sol en unidades astronómicas (ua)	Orden de magnitud
Mercurio	$3{,}870989 \times 10^{-1}$	10^{-1}
Venus	$7{,}233320 \times 10^{-1}$	10^{0}
Tierra	1×10^{0}	10^{0}
Marte	$1{,}523662 \times 10^{0}$	10^{0}
Júpiter	$5{,}203363 \times 10^{0}$	10^{1}
Saturno	$9{,}537070 \times 10^{0}$	10^{1}
Urano	$1{,}919059 \times 10^{1}$	10^{1}
Neptuno	$3{,}006896 \times 10^{1}$	10^{1}

15. Escribe cada uno de los siguientes números en notación científica.

a) x = 0,000000000003

b) y = 432 cienmilésimas

c) z = 243 millones

d) t = 623000000000000

Los números en notación científica son:

a) x = 0,000000000003 = 3×10^{-12}

b) y = 432 cienmilésimas = $4{,}32 \times 10^{-3}$

c) z = 243 millones = $2{,}43 \times 10^{8}$

d) t = 623000000000000 = $6{,}23 \times 10^{14}$

16. Efectúa, en notación científica, con los números de la actividad 15, las siguientes operaciones:

a) x + y

b) t – 1000 z

c) x · z · t

d) y : x · t

Los resultados de las operaciones son:

a) x + y = $4{,}320\,000\,003 \times 10^{-3}$

c) x · z · t = $4{,}54167 \times 10^{11}$

b) $t - 1000\,z = 6{,}22757 \times 10^{14}$ d) $y : x \cdot t = 8{,}9712\ 10^{23}$

17. En el *afelio* (punto de la órbita más alejado del Sol) Marte se encuentra a 249,1 millones de km del Sol y en el *perihelio* (punto de la órbita más próximo al Sol) se encuentra a 206,7 millones de km del Sol. Sabiendo que un año-luz es la distancia recorrida por la luz en un año (1 año-luz = $9{,}4605 \cdot 10^{12}$ km), calcula con redondeo a milésimas la distancia de Marte al Sol en el afelio en segundos-luz y en el perihelio en minutos-luz.

Los cálculos quedan:

Si un año-luz son $9{,}4605 \cdot 10^{12}$ km, entonces un minuto-luz será:

$$\frac{9{,}4605 \cdot 10^{12}}{365 \cdot 24 \cdot 60} = 17\ 999\ 429{,}22\ km = 1{,}799\ 9429 \cdot 10^{7}\ km$$

Si un año-luz son $9{,}4605 \cdot 10^{12}$ km, entonces un segundo-luz será:

$$\frac{9{,}4605 \cdot 10^{12}}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 299\ 990{,}4871\ km = 2{,}999\ 904871 \cdot 10^{5}\ km$$

La distancia Marte-Sol en el Afelio es 249 100 000 km = $2{,}491 \cdot 10^{8}$ km y en segundos-luz será:

$$\frac{2{,}491 \cdot 10^{8}}{2{,}999904871 \cdot 10^{5}} = 830{,}360\ segundos - luz$$

La distancia Marte-Sol en el Perihelio es 206 700 000 km = $2{,}067 \cdot 10^{8}$ km y en minutos-luz será:

$$\frac{2{,}067 \cdot 10^{8}}{1{,}7999429 \cdot 10^{7}} = 11{,}484\ minutos - luz$$

ACTIVIDADES FINALES de la página 31

18. Opera y simplifica:

a) $\dfrac{2^9 \cdot 10^3 \cdot 12^{-2} \cdot 30^{-3}}{3^{-7} \cdot 5^{-3} \cdot 60^3}$ **b)** $\dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{4^{\frac{3}{4}} \cdot 9^{-1}}$ **c)** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 : \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{9}{16}\right)^{\frac{2}{3}}$

Descomponemos las bases de las potencias en sus factores primos. Aplicamos las propiedades de las potencias y simplificamos.

a) $\dfrac{2^9 \cdot 10^3 \cdot 12^{-2} \cdot 30^{-3}}{3^{-7} \cdot 5^{-3} \cdot 60^3} = \dfrac{2^9 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot \left(2^2\right)^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-3}}{3^{-7} \cdot 5^{-3} \cdot \left(2^2\right)^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = \ldots = \dfrac{1}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{6}$

b) $\dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{4^{\frac{3}{4}} \cdot 9^{-1}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{-2}{3}}}{2^{\frac{6}{4}} \cdot 3^{-2}} = 2^{-1} \cdot 3^{\frac{4}{3}} = \dfrac{3^{\frac{4}{3}}}{2}$

c) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 : \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{9}{16}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{3-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{23}{6}}$

19. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt{36a^4 b^2}$ **c)** $\sqrt[4]{256 z^8}$ **e)** $\sqrt[3]{125 a^3 b^6}$

b) $\sqrt[3]{-8 x^6 y^3}$ **d)** $\sqrt[5]{243 x^{15}}$ **f)** $\sqrt[4]{16 x^8 y^4}$

Las soluciones son:

a) $\sqrt{36a^4 b^2} = 6a^2 b$ c) $\sqrt[4]{256 z^8} = 4z^2$ e) $\sqrt[3]{125 a^3 b^6} = 5ab^2$

b) $\sqrt[3]{-8 x^6 y^3} = -2x^2 y$ d) $\sqrt[5]{243 x^{15}} = 3x^3$ f) $\sqrt[4]{16 x^8 y^4} = 2x^2 y$

20. Expresa en forma de potencias las raíces, o en forma de raíz las potencias siguientes:

a) $\sqrt[4]{a}$ **c)** $\sqrt[5]{a^4}$ **e)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ **g)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

b) $3^{3/2}$ **d)** $7^{2/3}$ **f)** $7^{-3/2}$ **h)** $5^{-2/3}$

Las potencias y raíces pedidas son:

a) $\sqrt[4]{a} = a^{1/4}$ c) $\sqrt[5]{a^4}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}} = a^{-3/2}$

b) $3^{3/2} = \sqrt{3^3}$ d) $7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2}$ f) $7^{-3/2} = \dfrac{1}{\sqrt{7^3}}$ h) $5^{-2/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

21. Pon las siguientes expresiones bajo un único radical:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ **c)** $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}}$ **e)** $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}$

b) $\left(\sqrt[5]{ab^2}\right)^3$ **d)** $\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right)^4$ **f)** $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^9}}$

Los radicales son:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$ c) $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}} = \sqrt[4]{5^3}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a}}} = \sqrt[18]{a}$

b) $\left(\sqrt[5]{ab^2}\right)^3 = \sqrt[5]{a^3b^6}$ d) $\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right)^4 = a^6b$ f) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^9}} = \sqrt[12]{a^{13}}$

22. Extrae todos los factores posibles de los radicales siguientes:

a) $\sqrt{500}$ **c)** $\sqrt[3]{-160}$ **e)** $\sqrt{64a^7b^5}$ **g)** $\sqrt{9a^2-9}$

b) $\sqrt[3]{a^3b^4}$ **d)** $\sqrt[4]{625x^5y^6}$ **f)** $\sqrt[5]{x^5y^7z^9}$ **h)** $\sqrt{x^2+x^2y}$

Las expresiones quedan:

a) $\sqrt{500} = 10\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{a^3b^4} = ab\sqrt[3]{b}$

c) $\sqrt[3]{-160}$

d) $\sqrt[4]{625x^5y^6}$

e) $\sqrt{64a^7b^5} = 8a^3b^2\sqrt{ab}$

f) $\sqrt[5]{x^5y^7z^9} = xyz\sqrt[5]{y^2z^4}$

g) $\sqrt{9a^2 - 9} = 3\sqrt{a^2 - 1}$

h) $\sqrt{x^2 + x^2y} = x\sqrt{1 + y}$

23. Introduce los factores en el radical:

a) $5\sqrt{3}$

b) $3ab\sqrt[3]{a^2}$

c) $3\sqrt[4]{3^3}$

d) $a^4b^2\sqrt{2a^3b}$

e) $2\sqrt[3]{2a}$

f) $4ab\sqrt[3]{2a^2b}$

Los radicales quedan:

a) $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$

b) $3ab\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{27a^5b^3}$

c) $3\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3^7}$

d) $a^4b^2\sqrt{2a^3b} = \sqrt{2a^{11}b^5}$

e) $2\sqrt[3]{2a} = \sqrt[3]{16a}$

f) $4ab\sqrt[3]{2a^2b} = \sqrt[3]{128a^5b^4}$

24. Calcula, presentando el resultado en forma de raíz y en forma de potencia:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3^3}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot a^2$

c) $\sqrt[4]{2a^5} : \sqrt[4]{2a^3}$

d) $a^{-1} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt[5]{3^6} : \sqrt[5]{3^4}$

f) $\sqrt{a} : \sqrt[3]{a}$

Las soluciones son:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3^3}=\sqrt{3^4}=3^2$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot a^2=\sqrt[3]{a^7}=a^{7/3}$

c) $\sqrt[4]{2a^5}:\sqrt[4]{2a^3}=\sqrt{a}=a^{1/2}$

d) $a^{-1}\cdot\sqrt[3]{a^2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}=a^{-1/3}$

e) $\sqrt[5]{3^6}:\sqrt[5]{3^4}=\sqrt[5]{3^2}=3^{2/5}$

f) $\sqrt{a}:\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a}=a^{1/6}$

25. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $5\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}-3\sqrt{3}-\dfrac{5}{4}\sqrt{3}$

b) $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{2}+\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}-\dfrac{7}{12}\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{50}-\dfrac{1}{3}\sqrt{8}+\dfrac{7}{2}\sqrt{18}-\dfrac{3}{4}\sqrt{98}$

d) $3\sqrt[3]{250}-15\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{54}$

e) $3\sqrt{36a}-5\sqrt{4a}-\sqrt{25a}+6\sqrt{a}$

f) $3x^2\sqrt[3]{27x}-7\sqrt[3]{x^7}-x\sqrt[3]{x^4}$

Los resultados son:

a) $5\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}-3\sqrt{3}-\dfrac{5}{4}\sqrt{3}=-\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$

b) $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{2}+\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}-\dfrac{7}{12}\sqrt[3]{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{50}-\frac{1}{3}\sqrt{8}+\frac{7}{2}\sqrt{18}-\frac{3}{4}\sqrt{98}=\frac{115}{12}\sqrt{2}$

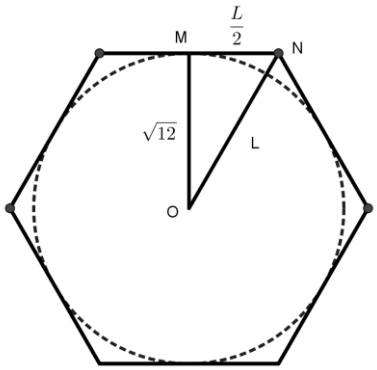
d) $3\sqrt[3]{250}-15\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{54}=0$

e) $3\sqrt{36a}-5\sqrt{4a}-\sqrt{25a}+6\sqrt{a}=9\sqrt{a}$

f) $3x^2\sqrt[3]{27x}-7\sqrt[3]{x^7}-x\sqrt[3]{x^4}=x^2\sqrt[3]{x}$

26. Halla el perímetro y el área de un hexágono regular circunscrito a una circunferencia de radio $\sqrt{12}$ cm.

El hexágono circunscrito a una circunferencia es aquel que sus lados son tangentes a la circunferencia.



Llamando L al lado del hexágono y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo OMN del dibujo, obtenemos:

$$L^2=\left(\sqrt{12}\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow L^2-\frac{L^2}{4}=12 \Rightarrow \frac{3L^2}{4}=12 \Rightarrow L^2=16 \Rightarrow L=4\ cm$$

El perímetro del hexágono mide 6 · 4 = 24 cm.

El área del hexágono mide $\frac{24\cdot\sqrt{12}}{2}\ cm^2=24\cdot\sqrt{3}\ cm^2\approx 41{,}57\ cm^2$.

ACTIVIDADES FINALES de la página 32

27. Realiza las siguientes operaciones simplificando lo más posible los resultados:

a) $\left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$

f) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{45}-\frac{3}{2}\sqrt{20}\right)\cdot\frac{2}{3}\sqrt{125}$

b) $2 \cdot \sqrt[3]{60} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{18}$

c) $\left(3\sqrt{5}-2\right)^2 - 6\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5}-2\right)$

d) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2 - \left(\sqrt{2}+2\right) \cdot \left(\sqrt{2}-2\right)$

e) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{3}$

g) $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{8}+2\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{72}-\sqrt{20}-\sqrt{2}\right)$

h) $\left(\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80}\right) : \left(\sqrt{245}-\sqrt{20}\right)$

i) $\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

j) $\left(\sqrt{75}-\sqrt{27}+2\sqrt{12}\right) : \left(3\sqrt{3}\right)$

Los resultados son:

a) $\left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{28}{3} - 2\sqrt{3}$

b) $2 \cdot \sqrt[3]{60} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{18} = 60$

c) $\left(3\sqrt{5}-2\right)^2 - 6\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5}-2\right) = 19$

d) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2 - \left(\sqrt{2}+2\right) \cdot \left(\sqrt{2}-2\right) = 8 + 4\sqrt{2}$

e) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{3} = .-\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

f) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{45} - \frac{3}{2}\sqrt{20}\right) \cdot \frac{2}{3}\sqrt{125} = -\frac{50}{3}$

g) $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{8}+2\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{72}-\sqrt{20}-\sqrt{2}\right) = 30$

h) $\left(\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80}\right):\left(\sqrt{245}-\sqrt{20}\right)=1$

i) $\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2-3\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=6-12\sqrt{6}$

j) $\left(\sqrt{75}-\sqrt{27}+2\sqrt{12}\right):\left(3\sqrt{3}\right)=2$

28. Reduce a índice común y ordena de menor a mayor las raíces de cada apartado:

a) $\sqrt{2},\ \sqrt[5]{5}$

b) $\sqrt[3]{10},\ \sqrt[5]{100}$

c) $\sqrt[3]{2^{-1}},\ \sqrt[9]{3},\ \sqrt{5}$

d) $\sqrt[4]{36},\ \sqrt[3]{15},\ \sqrt[6]{100}$

Las soluciones son:

a) Los radicales equivalentes a $\sqrt{2}, y\ \sqrt[5]{5}$ son $\sqrt[10]{2^5}=\sqrt[10]{32}$ y $\sqrt[10]{5^2}=\sqrt[10]{25}$; por tanto, $\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}$

b) Los radicales equivalentes a $\sqrt[3]{10}$ y $\sqrt[5]{100}$ son $\sqrt[15]{10^5}$ y $\sqrt[15]{10^6}$; por tanto, $\sqrt[3]{10}<\sqrt[5]{100}$

c) Los radicales equivalentes a $\sqrt[3]{2^{-1}},\ \sqrt[9]{3},\ \sqrt{5}$ son $\sqrt[18]{2^{-6}}, \sqrt[18]{3^2}$ y $\sqrt[18]{5^9}$; por tanto, $\sqrt[3]{2^{-1}}<\sqrt[9]{3}<\sqrt{5}$.

d) Los radicales equivalentes a $\sqrt[4]{36},\ \sqrt[3]{15}$ y $\sqrt[6]{100}$ son:

$\sqrt[12]{36^3}=\sqrt[12]{46656},\ \sqrt[12]{15^4}=\sqrt[12]{50625}$ y $\sqrt[12]{100^2}=\sqrt[12]{10000}$; por tanto, $\sqrt[6]{100}<\sqrt[4]{36}<\sqrt[3]{15}$

29. Opera:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{6}$

b) $\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[12]{a^7}$

e) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[8]{15625}$

f) $\sqrt[4]{a^2b^3}\cdot\sqrt[6]{2a^3b^2}$

c) $\sqrt[4]{8a^3b} : \sqrt{2ab}$

d) $\dfrac{\sqrt[12]{64}}{\sqrt[4]{4}}$

g) $\sqrt{5\sqrt[3]{5^2}}$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[6]{8}}{\sqrt{2}}$

Tras operar obtenemos:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{6} = 2\sqrt[12]{54}$

b) $\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[12]{a^7} = \sqrt[12]{a^{25}} = a^2\sqrt[12]{a}$

c) $\sqrt[4]{8a^3b} : \sqrt{2ab} = \sqrt[4]{\dfrac{2a}{b}}$

d) $\dfrac{\sqrt[12]{64}}{\sqrt[4]{4}} = 1$

e) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[8]{15625} = 25$

f) $\sqrt[4]{a^2b^3}\cdot\sqrt[6]{2a^3b^2} = \sqrt[12]{4a^{12}b^{13}} = ab\sqrt[12]{4b}$

g) $\sqrt{5\sqrt[3]{5^2}} = \sqrt[6]{5^5}$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[6]{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2^5}$

■ **30. Racionaliza las siguientes fracciones:**

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}$ **e)** $\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ **g)** $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ **d)** $\dfrac{7}{\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{3}}$ **f)** $\dfrac{-3}{2\sqrt{3}-3}$ **h)** $\dfrac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}+5}$

Tras racionalizar se obtiene:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

e) $\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 6\sqrt{3}+6$

f) $\dfrac{-3}{2\sqrt{3}-3} = -2\sqrt{3}-3$

c) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}} = 2\sqrt[3]{3}$

g) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = -9+4\sqrt{5}$

d) $\dfrac{7}{\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{3}} = \dfrac{\sqrt[6]{27\,783}}{3}$

h) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}+5} = 3-\sqrt{7}$

31. El diseñador Le Corbusier (1887-1965), a partir del estudio de las proporciones en el cuerpo humano, creo el Modulor, que es un sistema de diseño basado en la medida de 113 cm (la altura del ombligo medida desde el suelo) y en la proporción áurea. Se utilizó, entre otras cosas, en el diseño y construcción de objetos de mobiliario.

Construyó el Modulor a partir de considerar una altura estándar para el hombre, h =183 cm, y creando las llamadas series rojas y azul de la siguiente forma:

Serie roja: $\ldots h\cdot\varphi^{-2}, h\cdot\varphi^{-1}, h,\ h\cdot\varphi, h\cdot\varphi^{2}\ldots$

Serie azul: $\ldots 2\cdot h\cdot\varphi^{-2}, 2\cdot h\cdot\varphi^{-1}, 2\cdot h,\ 2\cdot h\cdot\varphi, 2\ h\cdot\varphi^{2}\ldots$

Demuestra que las sucesiones anteriores son sucesiones de Fibonacci (en las que cada término es suma de los dos anteriores) tomando $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y operando con los radicales.

Obviando la constante h = 183 cm en cada una de las series, puede comprobarse con facilidad, que se cumple:

$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+1+\sqrt{5}}{2} = 1+\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\phi$$

$$\phi^3 = \phi\cdot\phi^2 = \phi\cdot(1+\phi) = \phi+\phi^2$$

$$\phi^4 = \phi\cdot\phi^3 = \phi\cdot(\phi+\phi^2) = \phi^2+\phi^3$$

$$\phi^5 = \phi\cdot\phi^4 = \phi\cdot(\phi^2+\phi^3) = \phi^3+\phi^4$$

Y así sucesivamente.

También se cumple:

$$\phi^{-1} = \frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2\cdot(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi = 1 + \phi^{-1} = 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^{-2} = \frac{1}{\phi^2} = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{6+2\sqrt{5}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\phi}$$

$$\phi^{-1} + \phi^{-2} = \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = \frac{\phi}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^2} = \frac{\phi+1}{\phi^2} = \frac{\phi^2}{\phi^2} = 1$$

Y así sucesivamente.

ACTIVIDADES FINALES de la página 33

32. Encuentra los conjuntos solución de cada una de las siguientes desigualdades y represéntalos gráficamente:

a) $|x| \le 3$

b) $|3+2x| \ge 9$

c) $-1 < |2x+5| < 1$

d) $\left|\frac{x-4}{3}\right| < 2$

Los conjuntos solución buscados son:

a) El conjunto A que cumple la desigualdad $|x| \le 3$ es $A = \{x \in R \,/\, -3 \le x \le 3\} = [-3, 3]$. Su gráfica en la recta real es conocida.

b) El conjunto B cumple la desigualdad:

$$|3+2x| \geq 9 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3+2x \geq 9 & \Rightarrow \; 2x \geq 6 \quad \Rightarrow \; x \geq 3 \\ (-(3+2x) \geq 9 & \Rightarrow \; -2x \geq 12 \quad \Rightarrow \; x \leq -6 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es $B = (-\infty, -6] \cup [3, +\infty)$. La representación gráfica puede verse en el dibujo.

c) El conjunto C de las soluciones de la desigualdad $-1 < |2x+5| < 1$ es $C = \{x \in R \,/\, -3 < x < -2\}$. Su representación gráfica es:

d) Las soluciones de la inecuación $\left|\frac{x-4}{3}\right| < 2$ son:

$$\left|\frac{x-4}{3}\right| < 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{x-4}{3} < 2 & \Rightarrow \; x-4 < 6 \quad \Rightarrow \; x < 10 \\ -\frac{x-4}{3} < 2 & \Rightarrow \; -(x-4) < 6 \quad \Rightarrow \; x > -2 \end{cases}$$

El conjunto, D, de soluciones de la inecuación anterior es (- 2, 10). La representación gráfica puede verse en el dibujo.

33. Escribe y representa los intervalos de la recta real que contienen un número que verifica que:

a) Su cuadrado es menor que 3.

c) Su distancia a 2 es menor que 0,5.

b) Está a una distancia del origen menor que 2. **d) Su distancia al origen es mayor que 1.**

a) Si $x^2 < 3$, entonces $|x| < \sqrt{3}$, es decir, $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, que corresponde al intervalo $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.

b) Se cumple

$|x - 0| = |x| < 2$. Equivale a – 2 < x < 2, que corresponde al intervalo (- 2, 2).

c)Los puntos cuya distancia a 2 sea menor de 0,5, son los valores x que verifican: $|x - 2| < 0{,}5 \Rightarrow 1{,}5 < x < 2{,}5$. Es decir, son los valores que corresponden al intervalo (1,5; 2,5).

d) Los puntos cuya distancia al origen es menor o igual que 1 son los puntos del intervalo [- 1, 1], por lo que los puntos cuya distancia al origen es mayor que 1 son los que no están en dicho intervalo, es decir, los puntos de $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

34. Calcula, simplificando al máximo, el valor de:

a) $2\sqrt[3]{81} \cdot \left(\dfrac{2\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{3}} + \dfrac{5}{\sqrt[3]{9}} \right)$

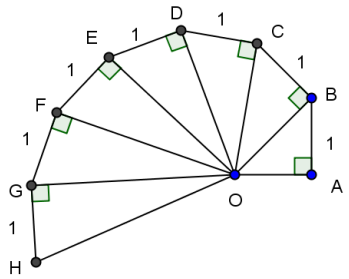
b) $\sqrt{\dfrac{5}{2}} - \sqrt{\dfrac{2}{5}}$

c) $\left(\frac{2}{3}\sqrt[5]{256}-\frac{2}{\sqrt[5]{972}}\right):\frac{\sqrt[5]{8}}{2}$

Las soluciones son:

a) $48+10\sqrt[3]{9}$ b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ c) 2

35. Llamamos «espiral de los radicales» a la figura adjunta.



a) Describe la construcción de la espiral.

b) Si la longitud del segmento OA es 1, calcula las longitudes de los segmentos OB, OC, OD, OE, OF y OG.

c) Construye un segmento de longitud $\sqrt{10}$ con la ayuda de esta espiral.

a) Partimos de un segmento OA de longitud 1. Por uno de sus extremos levantamos el segmento AB, también de longitud 1. Trazamos el segmento OB que con el punto A forma el triángulo rectángulo OAB.

En el extremo B del segmento OB trazamos el segmento BC perpendicular al anterior. Trazamos el segmento OC y tenemos otro triángulo rectángulo OBC.

En el extremo C repetimos la construcción anterior y así en todos los nuevos puntos que van apareciendo.

b) Para determinar la longitud del segmento OB utilizamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OAB y obtenemos:

$$OB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

Para calcular la longitud del segmento OC con el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OBC y obtenemos:

$$OC = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

Para calcular la longitud del segmento OD repetimos lo anterior en el triángulo rectángulo OCD y obtenemos:

$$OD = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Para determinar la longitud de los otros segmentos se procede de forma análoga.

Observamos que se obtiene la sucesión de los radicales:

$$OB = \sqrt{2}, OC = \sqrt{3}, OD = \sqrt{4} = 2, OE = \sqrt{5}, OF = \sqrt{6}, OG = \sqrt{7}, ...$$

c) Para obtener un segmento de longitud $\sqrt{10}$ basta con repetir el proceso de construcción tres pasos más.

36. Racionaliza, efectúa y simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} - \left(\sqrt{6} - 2\right)^2$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4} + \dfrac{5}{2\sqrt{5}}$

c) $1 - \left(\dfrac{1}{1+\sqrt{3}} - \dfrac{1}{1-\sqrt{3}}\right)$

Operando, obtenemos:

a) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} - \left(\sqrt{6} - 2\right)^2 = ... = \dfrac{-47 + 22\sqrt{6}}{5}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}+\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\ldots=\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}$

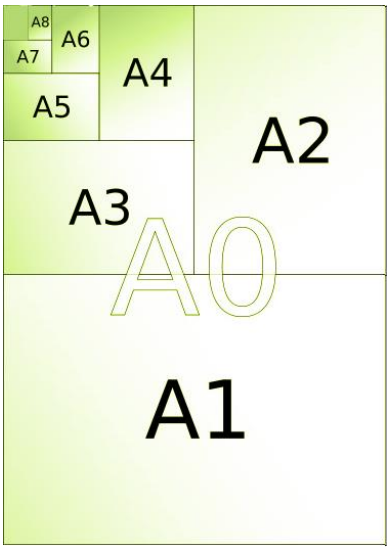
c) $1-\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}\right)=\ldots=1-\sqrt{3}$

37. Demuestra que el número cordobés $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ se puede expresar en la forma $\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

Expresamos el número $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ en la forma $\sqrt{\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}}$.

Racionalizamos el radicando: $\sqrt{\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}$.

Operamos en el radicando: $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.



38. La mayor parte del mundo usa los formatos de papel de la serie DIN. Uno de ellos corresponde a la serie A, que puedes ver en la imagen.

Estos formatos tienen la propiedad de que la relación entre sus lados es $\sqrt{2}$ y la superficie de cada uno de los formatos de esta serie es, aproximadamente, la mitad de la superficie del formato anterior, la superficie de A1 es la mitad de la de A0, la de A2 la mitad de A1 y así sucesivamente.

Halla los lados de los cuatro primeros formatos de esta serie A dando el resultado de dos formas: en forma radical y en forma de número decimal con aproximación a las milésimas.

Siendo x e y los lados del tamaño A0 podemos hallar estos valores mediante el sistema:

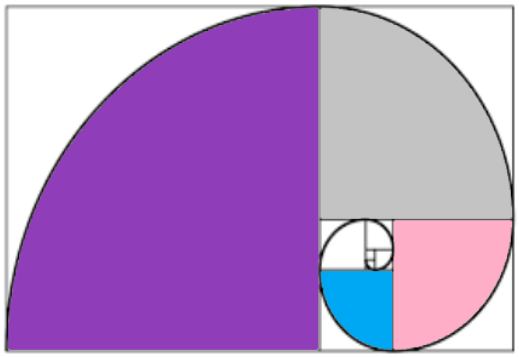
$$\begin{cases} x \cdot y = 1 \\ \dfrac{x}{y} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{cases}$$

De la misma forma obtenemos el resto de valores para los demás formatos.

FORMATO	A0	A1	A2	A3	A4
TAMAÑO	$\sqrt[4]{2}\ x\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\ x\ \frac{\sqrt[4]{2}}{2}$	$\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\ x\ \frac{\sqrt[4]{2^3}}{4}$	$\frac{\sqrt[4]{2^3}}{4}\ x\ \frac{\sqrt[4]{2}}{4}$	$\frac{\sqrt[4]{2}}{4}\ x\ \frac{\sqrt[4]{2^3}}{8}$
TAMAÑO (m)	**1,189 x 0,841**	**0, 841 x 0,594**	**0, 594 x 0,420**	**0,420 x 0,297**	**0, 297 x 0, 210**

ACTIVIDADES FINALES de la página 34

39. En la imagen está dibujada la espiral áurea o espiral de Durero. El nombre de «áurea» le viene porque esta dibujada a partir de un rectángulo áureo, como ves en el dibujo.



Se divide el rectángulo inicial en un cuadrado, de lado el lado menor del rectángulo áureo, y en un rectángulo, y así sucesivamente.

Prueba que este rectángulo también es áureo.

Como el rectángulo inicial es áureo, sus lados, que llamamos x e y, verifican:

$$\frac{x}{y} = \varphi$$

Tenemos que demostrar que los lados del siguiente rectángulo también verifican esta relación. Los lados son x - y e y.

Veamos que $\dfrac{y}{x-y} = \varphi$

Como $x = \varphi \cdot y$ entonces podemos poner:

$$\frac{y}{x-y}=\frac{y}{\varphi\, y-y}=\frac{1}{\varphi-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\varphi-1}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$$

Por tanto, queda demostrado que este rectángulo también es áureo. Y así podríamos hacer con los demás.

40. Efectúa y simplifica:

a) $\dfrac{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}:\sqrt[8]{a}}{\dfrac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[9]{a}}{\sqrt{a}}}$

b) $\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{3\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

Los radicales simplificados son: a) $a^{\frac{1}{72}}=\sqrt[72]{a}$ b) $\dfrac{6-\sqrt{2}}{17}$ c) 5

41. Comprueba que las identidades son ciertas:

a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$ **b)** $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

a) Elevamos los dos miembros al cuadrado y operamos:

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2=2^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4+2\sqrt{3}-2\sqrt{(4+2\sqrt{3})\cdot(4-2\sqrt{3})}+4-2\sqrt{3}=4 \ \Rightarrow\ 8-2\sqrt{4}=4 \ \Rightarrow\ 8-4=4\,.$$

Se verifica la igualdad.

b) Elevamos los dos miembros al cuadrado

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2+2\sqrt{12}+6}{16} \Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16}$$

Se verifica la igualdad.

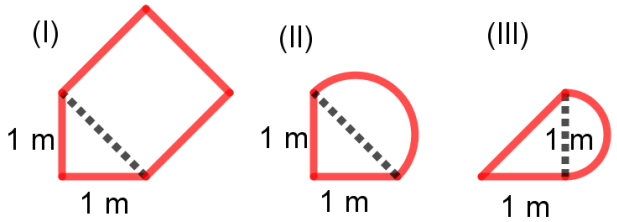
42. Calcula el valor de esta expresión y simplifica lo más posible:

$$\left(\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right)^2$$

El valor de las expresiones es:

$$\left(\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{7+2\sqrt{6}}{7-2\sqrt{6}} - \frac{7-2\sqrt{6}}{7+2\sqrt{6}} = \frac{\left(7+2\sqrt{6}\right)^2 - \left(7-2\sqrt{6}\right)^2}{7^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} = \frac{56\sqrt{6}}{25}$$

43. Para cada una de las figuras, expresa el valor de su perímetro y su área utilizando números irracionales. Calcula cada uno de estos seis números, redondeados a la segunda cifra decimal.



Los valores pedidos pueden verse en la tabla.

Figura	Perímetro	Área
I	$2+3\sqrt{2} = 6{,}24$ u.	$5/2 = 2{,}50$ u^2

II	$2+\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ = 4,22 u.	$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}=$ 2,07 u^2
III	$1+\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}$ = 3,99 u.	$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=$ 0,89 u^2

44. La masa de la Tierra es de $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, y la de Neptuno, $1{,}03 \cdot 10^{26}$ kg.

a) ¿Cuál es la relación entre ambas masas?

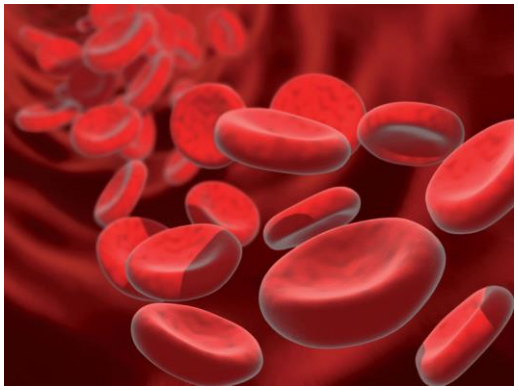
b) Suponiendo que ambos cuerpos fueran esferas perfectas con radios de 6378 y 24 750 km, respectivamente, calcula la densidad aproximada de cada uno de ellos.

a) La masa de Neptuno es $\frac{1{,}03 \cdot 10^{26}}{5{,}98 \cdot 10^{24}} =$ 17,224 veces la de la Tierra.

b) La densidad de la Tierra es $\frac{5{,}98 \cdot 10^{27}}{1{,}09 \cdot 10^{27}} =$ 5,49 g/cm^3.

La densidad de Neptuno es $\frac{1{,}03 \cdot 10^{29}}{6{,}35 \cdot 10^{28}} =$ 1,62 g/cm^3.

45. En un análisis de sangre de un paciente, el número de glóbulos rojos por mm^3 de sangre ha sido de $4{,}8 \cdot 10^6$.



a) ¿Cuál es el número de glóbulos rojos de este paciente, sabiendo que su cuerpo contiene aproximadamente 5 litros de sangre?

b) Si el diámetro de cada glóbulo rojo es aproximadamente de 10^{-2} mm, ¿cuál es la longitud en kilómetros de una hilera

formada por los glóbulos rojos de este paciente?

c) Si la longitud del Ecuador es aproximadamente de 40 000 km, ¿cuántas veces esta hilera de glóbulos rojos podría dar la vuelta a la Tierra?

Realiza los cálculos en notación científica.

a) Los 5 litros de sangre son 5 dm^3. Como cada dm^3 contiene 10^6 mm^3, entonces toda la sangre del paciente, en mm^3, será $5 \cdot 10^6$ mm^3.

Si el número de glóbulos rojos por mm^3 de sangre ha sido de $4{,}8 \cdot 10^6$; el número de glóbulos rojos del paciente serán:

$$(5 \cdot 10^6) \cdot (4{,}8 \cdot 10^6) = 2{,}4 \cdot 10^{13}.$$

b) Un kilómetro tiene 10^6 mm, por tanto, la longitud en kilómetros de todos los glóbulos rojos del paciente serán:

$$(2{,}4 \cdot 10^{13}) : (10^6) = 240\ 000 \text{ km}$$

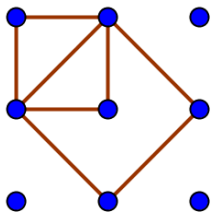
c) Si la longitud del Ecuador es aproximadamente de 40 000 km, el número de vueltas que da la hilera de glóbulos rojos alrededor de la Tierra será:

$$240\ 000 : 40\ 000 = 6.$$

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN de la página 35

Contando cuadrados

Vamos a contar cuadrados sobre cuadrículas de puntos.

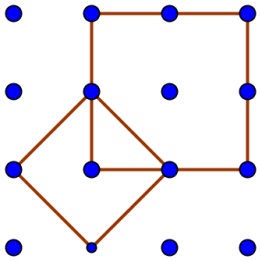


a) ¿Cuántos cuadrados se pueden dibujar de manera que tengan sus vértices sobre los puntos de la cuadrícula 3 x 3 del dibujo?

b) ¿Cuántos tipos diferentes de cuadrados se pueden dibujar sobre la citada cuadrícula?

c) ¿Cuántos cuadrados y de cuántos tipos diferentes se pueden dibujar sobre una cuadrícula de 4 x 4 puntos?

d) Intenta encontrar alguna regularidad repitiendo la situación anterior para las cuadrículas 5 x 5 y 6 x 6. Calcula cuántos cuadrados y de cuántos tipos podremos dibujar en una cuadrícula de 8 x 8 puntos.

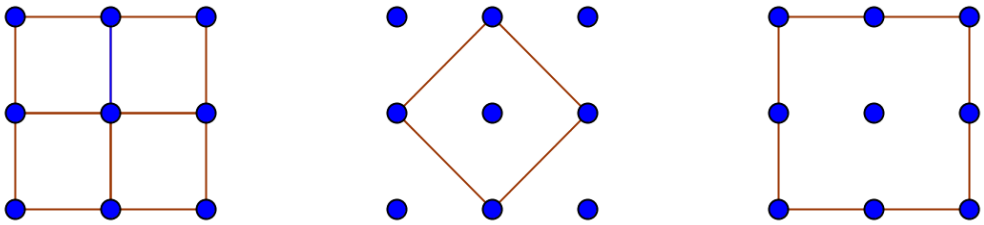


e) ¿Cuántos cuadrados se podrían dibujar sobre una cuadrícula de dimensión n x n?

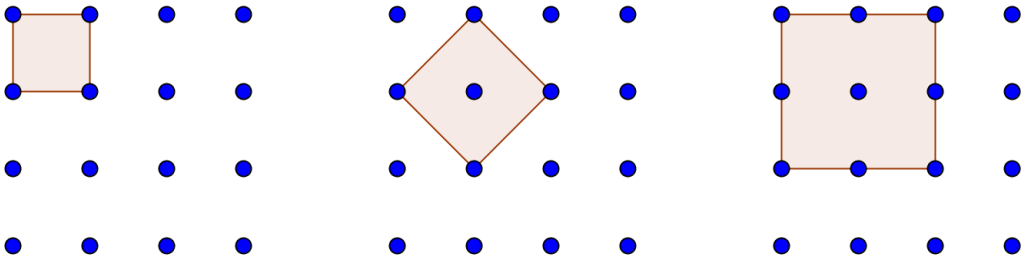
Nos gustaría investigar cuántos triángulos y de cuántos tipos que se pueden trazar sobre las mismas cuadrículas. Te atreverías a contar segmentos, rectángulos…

Y si las cuadrículas son de dimensiones m x n, ¿cuántos cuadrados, triángulos, segmentos, rectángulos… se pueden dibujar?

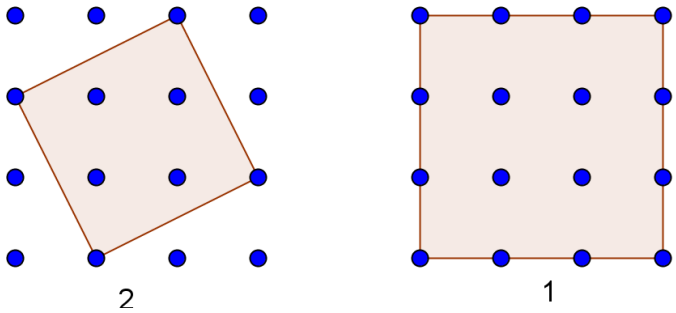
a) y b) En una cuadrícula de 3 x 3 puntos se pueden dibujar 6 cuadrados de 3 tamaños diferentes.



c) Sobre una cuadrícula de 4 x 4 puntos se pueden dibujar 20 cuadrados de 5 tamaños diferentes.



9 4 4



d) En una cuadrícula de 8 x 8 puntos se pueden dibujar cuadrados de 13 tamaños diferentes y podremos encontrar:

$$1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 4^2 + 5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 1^2 = 336 \text{ cuadrados.}$$

e) Sobre una cuadrícula de n x n puntos se pueden dibujar cuadrados de 2n - 3 tamaños diferentes y el siguiente número de cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i \cdot (n-i)^2 = 1 \cdot (n-1)^2 + 2 \cdot (n-2)^2 + 3 \cdot (n-3)^2 + \ldots + (n-1) \cdot 1^2 = \frac{n^4 - n^2}{12}$$